

I. ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 Σώμα

1.1.1 Ορισμός: Ένα σύνολο \mathbb{k} εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και \cdot ονομάζεται **σώμα** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

(A) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μηδενικό στοιχείο): Υπάρχει $\mathbf{0} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{0} + a = a + \mathbf{0} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Υπαρξη αντίθετου στοιχείου): Για κάθε $a \in \mathbb{k}$ υπάρχει $-a \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0},$$

(δ) (Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{k}.$$

(B) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μοναδιαίο στοιχείο): Υπάρχει $\mathbf{1} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Υπαρξη αντίστροφου στοιχείου): Για κάθε $a \in \mathbb{k} \setminus \{\mathbf{0}\}$ υπάρχει $a^{-1} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathbf{1},$$

(δ) (Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{k}.$$

(Γ) (Επιμεριστική ιδιότητα)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}.$$

Παραδείγματα: 1) Στο $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το \mathbb{R} είναι σώμα.

- 2) Στο $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το \mathbb{C} είναι σώμα.
- 3) Στο $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το \mathbb{Q} είναι σώμα.
- 4) Το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δε είναι σώμα διότι το 2 δεν έχει αντίστροφο.
- 5) Έστω $\mathbb{k} = \{0, 1\}$. Ορίζουμε τις πράξεις:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0$$

και

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1.$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1, άρα το $\mathbb{k} = \{0, 1\}$ είναι σώμα (συμβολίζεται με \mathbb{Z}_2).

Από τα παραπάνω σώματα, τα $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ είναι άπειρα σώματα, ενώ το \mathbb{Z}_2 είναι πεπερασμένο σώμα.

1.2 Πίνακες

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με \mathbb{k} το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των πραγματικών ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Ορισμός 1.2.1: Μία διάταξη στοιχείων ενός σώματος \mathbb{k} σε μορφή ορθογωνίου σχήματος αποτελούμενη από m -γραμμές και n -στήλες, λέγεται **πίνακας** $m \times n$. Δηλαδή, έστω A ένας πίνακας $m \times n$, τότε θα γράφουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Επίσης θα γράφουμε

$$A = (a_{ij}),$$

εννοώντας τον πίνακα που έχει στη θέση (i, j) το στοιχείο a_{ij} για $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με στοιχεία στο σώμα \mathbb{k} θα συμβολίζεται με $M_{m \times n}(\mathbb{k})$. Τους πίνακες θα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα της Ελληνικής ή της Λατινικής αλφαβήτου.

Όταν $m = n$ (δηλαδή αν ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των στηλών), τότε ο πίνακας θα λέγεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $n \times n$ με στοιχεία στο σώμα \mathbb{k} θα συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{k})$.

Δύο πίνακες $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ και $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ είναι **ίσοι** αν και μόνον αν $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Παραδείγματα: α) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & \frac{8}{3} & -7 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×3 με στοιχεία που ανήκουν στο \mathbb{Q} ή στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} .

β) Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία που ανήκουν στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} .

γ) Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία που ανήκουν στο \mathbb{C} .

1.3 Πράξεις Πινάκων

1.3.1 Πρόσθεση Πινάκων

Για να προσθέσουμε δύο πίνακες θα πρέπει αυτοί να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών αντίστοιχα. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ και $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$. Ορίζουμε το άθροισμα των δύο πινάκων $C = A + B$, ως τον πίνακα $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Δηλαδή η πρόσθεση δύο πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{k}) \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

γίνεται ως εξής:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 3-6 & -1+1 \\ 8+\sqrt{2} & -2-3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 8+\sqrt{2} & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ και $\lambda \in \mathbb{k}$. Ορίζουμε τον πίνακα $\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$.

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{k}$ με έναν πίνακα: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in$

$M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{k}).$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$. Ορίζουμε τον πίνακα $-A := (-1) \cdot A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$. Κατά συνέπεια μπορούμε να ορίσουμε την **αφαίρεση** πινάκων:

$$A - B := A + (-1)B.$$

1.3.3. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ένας πίνακας $m \times n$ και $B \in M_{s \times t}(\mathbb{k})$ ένας πίνακας $s \times t$. Για να πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός $A \cdot B$ απαιτείται $n = s$, δηλαδή ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα θα πρέπει να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ και $B = (b_{ij}) \in M_{n \times t}(\mathbb{k})$. Ορίζουμε ως το γινόμενο $C = A \cdot B$ τον πίνακα $C = (c_{ij}) \in M_{m \times t}(\mathbb{k})$ με

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \quad (1).$$

Παραδείγματα: 1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 7 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -27 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός. Δηλαδή, εν γένει, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.4 Ιδιότητες Πινάκων

1.4.1 Ορισμός: Ονομάζουμε **Μοναδιαίο** ή **Ταυτοτικό** πίνακα τον τετραγωνικό πίνακα $n \times n$ του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1 και όλα τα άλλα στοιχεία είναι μηδέν. Δηλαδή

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος γράφεται

$$I_n = (\delta_{ij}),$$

$$\text{με } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ 1, & \text{για } i = j \end{cases}.$$

1.4.2 Ορισμός: Ονομάζουμε **Μηδενικό** τον $m \times n$ πίνακα που όλα του τα στοιχεία είναι μηδέν, δηλαδή

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4.3 Πρόταση: Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$, $B = (b_{ij}) \in M_{s \times t}(\mathbb{k})$ και $C = (c_{ij}) \in M_{p \times q}(\mathbb{k})$.

(i) Αν $m = s$ και $n = t$, δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση του πίνακα A με τον πίνακα B , τότε

$$A + B = B + A \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης}).$$

(ii) Αν $m = s = p$ και $n = t = q$, δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση των πινάκων A, B, C , τότε

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης}).$$

(iii) $A + \mathbb{O} = A$, για κάθε πίνακα A .

(iv) $A + (-A) = \mathbb{O}$, για κάθε πίνακα A .

(v) $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A .

(vi) Έστω $n = s$ και $t = p$. Τότε

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα του πολ/σμού}).$$

(vii) (a) Έστω $n = s = p$ και $t = p$, τότε

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα από τα αριστερά}).$$

(b) Έστω $s = p$ και $t = q = m$, τότε

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα από τα δεξιά}).$$

Αποδ: (i) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) \\ &= B + A \end{aligned}$$

(ii) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα στο } \mathbb{k}) \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

(iii) Προφανές

(iv) Προφανές

(v) Έστω $A = (a_{ij})$ και $I_n = (\delta_{ij})$. Αν $A \cdot I_n = (c_{ij})$, τότε από τον τύπο 1.3.3(1) έχουμε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

Άρα $A \cdot I_n = A$. Όμοια δείχνουμε ότι $I_n \cdot A = A$.

(vi) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$A \cdot B = (d_{ij}), \quad \text{με } d_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j} \quad (1).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left(\sum_{k=1}^t d_{ik} c_{kj} \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(\sum_{k=1}^t \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj} \right) \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^t b_{\ell k} c_{kj} \right) \right) \quad (2). \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε,

$$B \cdot C = (e_{ij}), \quad \text{με } e_{ij} = \sum_{k=1}^t b_{ik}c_{kj} \quad (3).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} e_{\ell j} \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^t b_{\ell k} c_{kj} \right) \right) \quad (4). \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
(vii) (a) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right) \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right) \right] \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right) \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

(b) Όμοια με το (a) αποδεικνύουμε ότι $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$. \square

1.5 Δύναμη Πίνακα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Ισχύει,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ \dots &\quad \dots \\ A^n &= \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n\text{-φορές}}. \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$A^0 := I_n.$$

Υπολογίζοντας το τετράγωνο του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων A, B βρίσκουμε:

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2. \quad (1)$$

Αν οι πίνακες A, B μετατίθενται μεταξύ τους τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2.$$

Πιο γενικά η n -οστή δύναμη του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων A, B που μετατίθενται μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

1.5.1 Πρόταση: Αν οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ μετατίθενται μεταξύ τους τότε:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} \cdot B + \binom{n}{2}A^{n-2} \cdot B^2 + \dots + \binom{n}{n-1}A \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n}B^n,$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, με $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ και $0! := 1$.

Αποδ.: Η απόδειξη είναι έξω από τους σκοπούς του μαθήματος. \square

Παράδειγμα: Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A γράφεται:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B,$$

όπου $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι οι πίνακες B και I_3 μετατίθενται μεταξύ τους, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$(I_3 + B)^n = \binom{n}{0}I_3^n + \binom{n}{1}I_3^{n-1} \cdot B + \dots + \binom{n}{n-1}I_3 \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n}B^n. \quad (1)$$

Επειδή ο I_3 είναι ο μοναδιαίος πίνακας, έχουμε $I_3^n = I_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά υπολογίζουμε τις δυνάμεις του B :

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο μηδενικός πίνακας 3×3 . Κατά συνέπεια $B^k = \mathbb{O}$ για κάθε $k \geq 3$.

Συνεπώς, από τον τύπο (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A^n &= (I_3 + B)^n \\
 &= I_3^n + \binom{n}{1} I_3^{n-1} \cdot B + \binom{n}{2} I_3^{n-2} \cdot B^2 + \binom{n}{3} I_3^{n-3} \cdot \overbrace{B^3}^{\equiv 0} + \dots + \binom{n}{n} \overbrace{B^n}^{\equiv 0} \\
 &= I_3 + n I_3 \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} I_3 \cdot B^2 \\
 &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.6 Διαγώνιος Πίνακας

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ ονομάζεται **διαγώνιος** αν όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι 0, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Θα το συμβολίζουμε με $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Παράδειγμα: Έχουμε $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$

1.7 Κλιμακωτός Πίνακας

1.7.1 Ορισμός: Ένας $m \times n$ πίνακας, ονομάζεται **κλιμακωτός**, αν και μόνον αν,

(i) το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (από τα αριστερά), κάθε μη μηδενικής γραμμής, είναι 1. Αυτό το στοιχείο ονομάζεται **ηγετικό**.

(ii) Το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή, βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της κάθε προηγούμενης.

(iii) Οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν (πάνω) από τις μηδενικές γραμμές.

Παραδείγματα:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ κλιμακωτός}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ κλιμακωτός}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός}$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός.}$$

1.7.2 Ορισμός: Ένας κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος** κλιμακωτός, αν και μόνον αν, το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται το 1.

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ανηγμένος κλιμακωτός.}$$

1.8 Αντίστροφος Πίνακας

1.8.1 Ορισμός: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Θα λέμε ότι ο A είναι **αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει ένας πίνακας B $n \times n$, τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (*)$$

Ο B λέγεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1} .

1.8.2 Πρόταση: Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι μοναδικός.

Αποδ.: Έστω B, C δύο αντίστροφοι του πίνακα A . Τότε από τον ορισμό και την εξίσωση (*) έχουμε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad (1)$$

$$B \cdot C = C \cdot B = I_n \quad (2).$$

Κατά συνέπεια έχουμε,

$$C = C \cdot I_n \stackrel{(1)}{=} C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B \stackrel{(2)}{=} I_n \cdot B = B. \square$$

1.8.3 Πρόταση: Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε και ο $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Αποδ.: Επειδή οι A, B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, από τον ορισμό και την εξίσωση (*) έχουμε:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad (1)$$

$$B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_n \quad (2).$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} A \cdot I_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &\stackrel{(1)}{=} I_n \end{aligned}$$

και από την άλλη μεριά

$$\begin{aligned} (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &\stackrel{(1)}{=} B^{-1} \cdot I_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &\stackrel{(2)}{=} I_n. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό, ο $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \square$

1.9 Ανάστροφος Πίνακας

1.9.1 Ορισμός: Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ένας $m \times n$ πίνακας (όχι απαραίτητα τετραγωνικός). Ονομάζουμε **ανάστροφο** πίνακα του A , τον πίνακα $n \times m$, ο οποίος έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A . Συμβολίζουμε με A^t τον ανάστροφο του πίνακα A .

Παράδειγμα:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.9.2 Πρόταση: Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Τότε,

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(iii) $(A^t)^t = A$.

(iv) $I^t = I$.

(v) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Αποδ.: Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Τότε $A^t = (a'_{ij})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ και $B^t = (b'_{ij})$ με $b'_{ij} = b_{ji}$.

(i) $(A+B)^t = ((a_{ij}+b_{ij})') = (a_{ji}+b_{ji}) = (a'_{ij}+b'_{ij}) = (a'_{ij})+(b'_{ij}) = A^t+B^t$.

(ii) Έστω $A \cdot B = (c_{ij})$ με $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Τότε,

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^t = (c'_{ij}) &= (c_{ji}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n b'_{ik}a'_{kj} \right) \\ &= B^t \cdot A^t. \end{aligned}$$

(iii) $(A^t)^t = ((a'_{ij})') = ((a_{ji})') = (a_{ij}) = A$.

(iv) $I_n^t = (\delta'_{ij}) = (\delta_{ji}) = (\delta_{ij}) = I_n$.

(v) $(\lambda A)^t = ((\lambda a_{ij})') = ((\lambda a_{ji})') = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a'_{ij}) = \lambda A^t. \square$

1.9.3 Πρόταση: Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^t είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Αποδ.: (\implies) Έστω A αντιστρέψιμος. Από τον ορισμό προκύπτει ότι υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$. Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέλη της ισότητας:

$$(A \cdot A^{-1})^t = I_n^t \iff (A^{-1})^t \cdot A^t = I_n. \quad (1)$$

Όμοια από την εξίσωση $A^{-1} \cdot A = I_n$ παίρνουμε την εξίσωση $A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$ (2). Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο αντίστροφος πίνακας του A^t είναι ο $(A^{-1})^t$, δηλαδή ο A^t είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον έχουμε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(\impliedby) Έστω A^t αντιστρέψιμος τότε από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι ο $(A^t)^t$ είναι αντιστρέψιμος δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος. \square

1.10 Συμμετρικοί, Αντισυμμετρικοί και Ορθογώνιοι Πίνακες

1.10.1 Ορισμοί: (i) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός** αν και μόνον αν $A^t = A$.

(ii) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν $A^t = -A$.

(iii) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **ορθογώνιος** αν και μόνον αν $A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n$.

Παραδείγματα:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ συμμετρικός}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ αντισυμμετρικός}$$

$$(iii) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ορθογώνιος.}$$