1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ 1

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις στους πίνακες:

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right].$$

2. (α) Να δείξετε ότι αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $AB = AC$, τότε $B = C$.

(β) Εάν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, βρείτε δύο διαφορετικούς πίνακες B, C τέτοιους ώστε $AB = AC$.

3. Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Έστω ότι υπάρχουν πίνακες L, R $n \times n$ τέτοιοι ώστε $LA = I_n$ και $AR = I_n$. Δείξτε ότι $L = R$.

4. Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Δείξτε ότι αν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος τότε και ο A είναι αντιστρέψιμος.

5. Έστω A, B τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες $n \times n$. Δείξτε ότι ο AB είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $AB = BA$.

6. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $I_n - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι:

(α) $(I_n - BA)(I + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n$.

(β) Ο πίνακας $I_n - BA$ είναι αντιστρέψιμος.

7. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Έστω A, B, C $n\times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Δείξτε ότι $C^{-1}(AB^{-1})^{-1}(CA^{-1})^{-1}C^2 = C^{-1}BC$.

9. Έστω A αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι αν ο A είναι συμμετρικός τότε και ο A^{-1} είναι συμμετρικός.

10. Λύστε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$(\Sigma)\begin{cases} x + 3y + 4z = 14 \\ 2x - 3y + 2z = 10 \\ 3x - y + z = 9 \end{cases}$$