ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: Εξέταση 16/6/2017

Ερωτήσεις

1. (Α) (1.25μ) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ), $y' - y = 1 + 3\sin t, \quad y(0) = y_0$. Να προσδιοριστεί η τιμή του y_0, ώστε η λύση του Π.Α.Τ. να είναι φραγμένη.

(Β)(1.25μ) Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση $f(t)$ που ικανοποιεί την συνθήκη $f(0) = -2$, τέτοια ώστε η διαφορική εξίσωση $1 + y^2 \sin t + f(t) y y' = 0$, να είναι ακριβής. Στην συνέχεια να λύσετε την διαφορική εξίσωση.

2. (Α) (i) (1.25μ) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση 2ης τάξης $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = F_0 \cos \Omega t$. Οι σταθερές $\gamma > 0, \quad \omega \neq 0$ (δηλαδή $\omega^2 > 0$), $F_0 > 0$, $\Omega \neq 0$. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης, διερευνώντας τις διάφορες περιπτώσεις για τις παραμέτρους γ και ω. **(ii) (0.25μ)** Εξηγείστε γιατί η λύση γίνεται περιοδική για μεγάλους χρόνους.

(Β) (1μ) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση 2ης τάξης $y'' - y' - 2y = e^{-t}$. Να βρεθεί μια *ειδική λύση* της εξίσωσης με την μέθοδο του Lagrange.

3. (Α) (1.5μ) Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ., για το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, με αρχική συνθήκη $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(Β) (1μ)** Να λυθεί η εξίσωση του Euler $t^2 y'' - t y' - 8y = 0$, $t > 0$. Περιγράψτε κατάλληλη συνθήκη ώστε η λύση να είναι φραγμένη καθώς $t \to 0^+$.

4. Α) (1μ) *(Συνεχής εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες)*. Θεωρούμε το Π.Α.Τ για την ΣΔΕ $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t, y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του Π.Α.Τ, εντός του $[t_0, t_1] \times [A, B]$, και ότι η λύση του Π.Α.Τ για $y_0 \in [A, B]$, ορίζεται για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T] \subset [t_0, t_1]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν για τις αρχικές συνθήκες $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, ισχύει $|y_0 - z_0| < \delta$, οι αντίστοιχες λύσεις του Π.Α.Τ για αυτές τις αρχικές συνθήκες, ικανοποιούν την εκτίμηση $|y(t) - z(t)| < \varepsilon$, για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Β) (1.5μ) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηριστούν ως προς την ευστάθεια, και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής, για την διαφορική εξίσωση $y' = -y(y^2 - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Στην συνέχεια, θεωρείστε ότι $\lambda = 1$. Περιγράψτε την μονοτονία της λύσης και το $\lim_{t \to +\infty} y(t)$, όταν η αρχική συνθήκη $y(0) = 0.001$ και όταν η αρχική συνθήκη $y(0) = -0.001$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή επιτυχία.