ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: Εξέταση 22/9/2017

Ερωτήσεις

1. (A) (0.5μ) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) $\begin{array}{l} x' = x^2, \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{array}$. Ποια είναι η λύση του για $x_0 = 0$; Είναι μοναδική? Δικαιολογείστε την απάντηση σας. **(Β)(1 μ)** Θεωρούμε το ίδιο πρόβλημα αρχικών τιμών για $x_0 = \varepsilon > 0$. Ποια είναι η λύση του; Είναι μοναδική; Δικαιολογείστε την απάντηση σας. **(Γ) (1μ)** Για την περίπτωση **(Β),** προσδιορίστε το διάστημα ύπαρξης της λύσης του ΠΑΤ, και δείξτε ότι υπάρχει $T^* > 0$, τέτοιο ώστε $\lim_{t \to T^*} x(t) = +\infty$, δηλαδή *ότι η λύση δεν ορίζεται για κάθε* $t > 0$, *αλλά εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.* Υπάρχει κάποια αντίφαση σε σχέση με τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας; Συζητείστε και δικαιολογείστε την απάντηση σας.

2. (A) (i) (1.25μ) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης $y'' + y' + y = \sin t$. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης **(ii) (0.25μ)** Εξηγείστε γιατί η λύση γίνεται περιοδική για μεγάλους χρόνους.

(B) (1μ) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης $y'' + y = \tan t$. Να βρεθεί μια *ειδική λύση* της εξίσωσης με την μέθοδο του Lagrange.

3. (A) (1.5μ) Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ., για το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, με αρχική συνθήκη $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(B) (1μ)** Να λυθεί η εξίσωση του Euler $t^2 y'' - 5ty' + 25y = 0$, $t > 0$. Ποια είναι η λύση όταν $t < 0$;

4. (A) (1.25μ) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηριστούν ως προς την ευστάθεια, και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής, για την διαφορική εξίσωση $y' = k\,y\left(1 - \frac{y}{N}\right)$, όπου οι σταθερές $k > 0, N > 0$. Δεδομένου ότι η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την εξέλιξη ενός πληθυσμού, δώστε μια ερμηνεία των αποτελεσμάτων σας. **(B) (1.25μ)** Στη συνέχεια, να λύσετε το ΠΑΤ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 > 0$ και να επιβεβαιώσετε τα συμπεράσματα του διαγράμματος ροής μελετώντας το όριο της λύσης $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή επιτυχία.