

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: Εξέταση 7/2/2018

Ερωτήσεις

1. **(A) (1μ)** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) $x' = x^{1/3}$, $x(0) = 0$. Έχει μοναδική λύση; Δικαιολογείστε

την απάντησή σας ελέγχοντας τις υποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας. **(B)(1.5 μ)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\left(3\sin y + 5ye^{5x} + \frac{2ye^{5x}}{x} \right) dx + (x \cos y + e^{5x}) dy = 0.$$

(i) Δείξτε ότι δεν είναι ακριβής. (ii) Δείξτε ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας ο οποίος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x και υπολογίστε τον. Με χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα, να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης.

2. **(A) (i) (1.25μ)** Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης $y'' + y' - 6y = 5e^{-3t}$. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης με την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών.

(B) (1μ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του ερωτήματος (A) με την μέθοδο του Lagrange.

3. **(A) (1.5μ)** Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ., για το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, με αρχική συνθήκη $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(B) (1μ)** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης τύπου Euler $t^2 y'' - ty' + 10y = 0$, με αρχικές συνθήκες $y(1) = 2$ και $\dot{y}(1) = 1$.

4. **(A) (1.25μ)** Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηριστούν ως προς την ευστάθεια, και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροής, για την διαφορική εξίσωση $y' = y - y^2$. Για την μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, να χρησιμοποιήσετε την μέθοδο της γραμμικοποίησης, αλλά και την μέθοδο της μονοτονίας, επιβεβαιώνοντας ότι τα αποτελέσματα και των δυο μεθόδων συμπίπτουν. **(B) (1.25μ)** Στη συνέχεια, να λύσετε το ΠΑΤ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 > 0$ και να επιβεβαιώσετε τα συμπεράσματα του διαγράμματος ροής μελετώντας το όριο της λύσης $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή επιτυχία.