

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Έστω $M_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων που ορίζονται πάνω σ' ένα σώμα $\mathbb{K}$. Για $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $M_n(\mathbb{Q})$ είναι το σύνολο των ρητών $n \times n$ πινάκων, για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των πραγματικών $n \times n$ πινάκων και για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$ είναι το σύνολο των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων.

Ορίζουσες $n \times n$.

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (r_1, \dots, r_n),$$

όπου $r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ είναι οι γραμμές του A για $i = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ λέγεται **ορίζουσα συνάρτηση** αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1) (n -γραμμική): (α) Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε

$$\det(r_1, \dots, r_i + r'_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, r'_i, \dots, r_n).$$

(β) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$\det(r_1, \dots, \lambda r_i, \dots, r_n) = \lambda \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n).$$

2) (Εναλλάσσοις) Αν δύο διαδοχικές γραμμές ενός πίνακα A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$. Δηλαδή αν $r_k = r_{k+1}$ για κάποιο k , τότε

$$\det(r_1, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n) = 0.$$

3) $\det(I_n) = 1$.

Θα ονομάζουμε το $\det A$ **ορίζουσα** του A . Επίσης θα συμβολίζουμε την ορίζουσα ενός πίνακα, με τον ίδιο τον πίνακα αντικαθιστώντας τις παρενθέσεις του πίνακα από δύο κάθετες γραμμές.

Παράδειγμα 1: Η συνάρτηση $\det : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ που ορίζεται από τον τύπο $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$ είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha'_{11} & \alpha_{12} + \alpha'_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} + \alpha'_{21} & \alpha_{22} + \alpha'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

δηλαδή η συνάρτηση είναι γραμμική στις δύο γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Παράδειγμα 2: Η συνάρτηση $\det : M_3(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ που ορίζεται από τον τύπο ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha'_{11} & \alpha_{12} + \alpha'_{12} & \alpha_{13} + \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha'_{11} & \alpha_{12} + \alpha'_{12} & \alpha_{13} + \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_{11} + \alpha'_{11})\alpha_{22}\alpha_{33} + (\alpha_{12} + \alpha'_{12})\alpha_{23}\alpha_{31} + (\alpha_{13} + \alpha'_{13})\alpha_{21}\alpha_{32} \\ &\quad - (\alpha_{11} + \alpha'_{11})\alpha_{23}\alpha_{32} - (\alpha_{12} + \alpha'_{12})\alpha_{21}\alpha_{33} - (\alpha_{13} + \alpha'_{13})\alpha_{22}\alpha_{31} \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\ &\quad + \alpha'_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha'_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha'_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha'_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha'_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha'_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύουμε την παραπάνω ιδιότητα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή.

Επίσης έχουμε

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \lambda \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \lambda \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - \lambda \alpha_{11} \alpha_{23} \alpha_{32} - \lambda \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} - \lambda \alpha_{13} \alpha_{22} \alpha_{31} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

και το ίδιο μπορούμε να αποδείξουμε για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή. Συνεπώς η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις τρεις γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{11}a_{13}a_{32} - a_{12}a_{11}a_{33} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{23} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{11} - a_{11}a_{23}a_{12} - a_{12}a_{21}a_{13} = 0.$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Ιδιότητες οριζουσών

Πρόταση 1: Αν αλλάξουμε τη σειρά δύο διαδοχικών γραμμών τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή για $i = 1, 2, \dots, n-1$ αν $A = (r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_n)$ και $B = \det(r_1, \dots, r_{i+1}, r_i, \dots, r_n)$, τότε

$$\det(B) = -\det(A).$$

Αποδ: Από την ιδιότητα 1(a) του ορισμού της ορίζουσας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(r_1, \dots, r_i + r_{i+1}, r_i + r_{i+1}, \dots, r_n) \\
&= \overbrace{\det(r_1, \dots, r_i, r_i, \dots, r_n)}^{=0} + \det(r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_n) \\
&+ \det(r_1, \dots, r_{i+1}, r_i, \dots, r_n) + \overbrace{\det(r_1, \dots, r_{i+1}, r_{i+1}, \dots, r_n)}^{=0} \\
&= 0 + \det(A) + \det(B) + 0.
\end{aligned}$$

Άρα $\det(B) = -\det(A)$. $\square$

Πρόταση 2: Αν δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε

$$\det A = 0.$$

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι $A = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n)$ με $r_i = r_j$. Αλλάζουμε την i -γραμμή με τις επόμενες διπλανές γραμμές έως ότου αυτή η γραμμή πάρει τη θέση της διπλανής γραμμής της j -γραμμής. Από την πρόταση 1 το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει σε κάθε εναλλαγή. Άρα,

$$\begin{aligned} \det A &= \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n) \\ &= \pm \det(r_1, \dots, r_i, r_j, \dots, r_n) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{από την ιδιότητα 2 του ορισμού, διότι } r_i = r_j)$$

Επομένως $\det A = 0$. $\square$

Πρόταση 3: Αν $j \neq i$, τότε

$$\det(r_1, \dots, r_i + \lambda r_j, \dots, r_j, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n),$$

δηλαδή αν ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής προστεθεί σε μία άλλη γραμμή τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

Αποδ.: Από την ιδιότητα 1 του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} &\det(r_1, \dots, r_i + \lambda r_j, \dots, r_j, \dots, r_n) \\ &= \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n) + \lambda \overbrace{\det(r_1, \dots, r_j, \dots, r_j, \dots, r_n)}^{=0 \text{ (από πρόταση 2)}} \\ &= \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n). \square \end{aligned}$$

Ορισμός: Αν $A = (\alpha_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$, έστω $A(i|j) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν παραλείψουμε την i -γραμμή και j στήλη του A . Ο $A(i|j)$ ονομάζεται **ελάσσονας** πίνακας του στοιχείου α_{ij} .

Θεώρημα 1: Έστω $n > 1$ και $\det : M_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ μια ορίζουσα συνάρτηση. Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ οι συναρτήσεις $D_j : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ τέτοιες ώστε:

$$D_j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A(i|j))$$

είναι ορίζουσες συναρτήσεις.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $A = (r_1, \dots, r_n)$. Ο ελάσσονας πίνακας $A(i|j)$ γράφεται:

$$A(i|j) = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \bar{r}_n),$$

όπου $\bar{r}_i$ είναι η i -γγραμμή χωρίς το j -στοιχείο. Επομένως:

$$\begin{aligned}
& D_j(r_1, \dots, r_k + r'_k, \dots, r_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k + \bar{r}'_k, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_n) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}'_k, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_n) \\
&= D_j(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n) + D_j(r_1, \dots, r'_k, \dots, r_n)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& D_j(r_1, \dots, \lambda r_k, \dots, r_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\bar{r}_1, \dots, \lambda \bar{r}_k, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_n) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k, \dots, \bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_n) \\
&= \lambda D_j(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n).
\end{aligned}$$

Άρα η D_j είναι n -γγραμμική.

Δείχνουμε τώρα ότι η D_j είναι εναλλάσσουσα. Έστω $r_k = r_{k+1}$. Θεωρώ $i \neq k$ και $i \neq k+1$. Συνεπώς ο $A(i|j)$ έχει δύο διαδοχικές σειρές ίσες. Επομένως από την ιδιότητα 2 του ορισμού, έχουμε $\det(A(i|j)) = 0$. Άρα

$$D_j(A) = (-1)^{k+j} \alpha_{kj} \det(A(k|j)) + (-1)^{k+1+j} \alpha_{k+1,j} \det(A(k+1|j)).$$

Επειδή όμως $r_k = r_{k+1}$ έπεται ότι $\alpha_{kj} = \alpha_{k+1,j}$ και $A(k|j) = A(k+1|j)$. Άρα $D_j(A) = 0$.

Τέλος έχουμε, $(I_n)(j|j) = I_{n-1}$ και $\det((I_n)(j|j)) = 1$, συνεπώς $D_j(I_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \delta_{ij} \det(I_n(i|j)) = (-1)^{j+j} \det(I_n(j|j)) = 1$. Δηλαδή η $D_j(I_n) = 1$. Άρα για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ οι D_j είναι ορίζουσες συναρτήσεις. $\square$

Παρατήρηση 1: Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις συναρτήσεις:

$$D'_i(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i/j)).$$

Δηλαδή αν $\det : M_{n-1}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσα συνάρτηση, τότε και οι συναρτήσεις $D'_i : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσες συναρτήσεις, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ (Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1).

Πόρισμα 1 (Ύπαρξη ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει τουλάχιστον μία ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n . Ήδη είδαμε ότι υπάρχει στο $M_2(\mathbb{k})$ (Παράδειγμα 1). Επίσης το Θεώρημα 1 μας λέει πως μπορούμε να πάρουμε ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$ όταν έχουμε μια τέτοια συνάρτηση στο $M_{n-1}(\mathbb{k})$. $\square$

Θεώρημα 2 (Μοναδικότητα ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει μία και μοναδική ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ και $\det, \det'$ ορίζουσες συναρτήσεις. Θέτω $\Delta(A) = \det(A) - \det'(A)$. Θα δείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$. Έστω $A = (r_1, \dots, r_n)$, με

$$r_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (*),$$

όπου $e_j = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$ είναι ο πίνακας γραμμή που έχει 1 στην j -θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Παρατηρούμε ότι :

- α) Η Δ είναι n -γραμμική (διότι $\det, \det'$ είναι n -γραμμικές).
- β) Η Δ είναι εναλλάσσουσα (διότι $\det, \det'$ είναι εναλλάσσουσες).
- γ) Αν $(k_1, \dots, k_n)$ είναι μια μετάθεση των $(1, 2, \dots, n)$, τότε

$$\Delta(r_{k_1}, r_{k_2}, \dots, r_{k_n}) = \pm \Delta(r_1, r_2, \dots, r_n).$$

(διότι το ίδιο συμβαίνει για τις $\det, \det'$).

$$\delta) \Delta(I_n) = \det(I_n) - \det'(I_n) = 1 - 1 = 0.$$

Από την εξίσωση (*) αν αντικαταστήσουμε το r_1 έχουμε:

$$\Delta(r_1, r_2, \dots, r_n) = \Delta\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{1j} e_j, r_2, \dots, r_n\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \Delta(e_j, r_2, \dots, r_n).$$

Κατόπιν αντικαθιστούμε το r_2 με $\sum_k \alpha_{2k} e_k$. Έτσι $\Delta(e_j, r_2, \dots, r_n) = \sum_k \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \dots, r_n)$. Συνεπώς,

$$\Delta(A) = \sum_{j,k} \alpha_{1j} \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \dots, r_n).$$

Αντικαθιστούμε το r_3 με $\sum_\ell \alpha_{3\ell} e_\ell$, κ.ο.κ. Έτσι τελικά έχουμε:

$$\Delta(A) = \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq n} \alpha_{1,k_1} \alpha_{2,k_2} \dots \alpha_{n,k_n} \Delta(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}).$$

Όμως, $\Delta(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \pm \Delta(e_1, \dots, e_n) = 0$ από το (δ). Επομένως $\Delta(A) = 0$. $\square$

Πόρισμα 1: Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i | j).$$

και για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i | j).$$

Σημείωση: Οι παραπάνω τύποι υπολογισμού της ορίζουσας ονομάζονται αντίστοιχα **τύπος αναπτύγματος κατά τη j -στήλη** και **τύπος αναπτύγματος κατά τη i -γραμμή**.

Αποδ.: Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 2 και της παρατήρησης 1. $\square$

Παράδειγμα 2: $\det : M_3(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, 1 \leq j \leq 3$. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(A) &= D_1(A) = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= D_2(A) = -\alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= D_3(A) = \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} - \alpha_{23} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + \alpha_{33} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= D'_1(A) = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= D'_2(A) = -\alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{23} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= D'_3(A) = \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + \alpha_{33} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3: Αν $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, τότε

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Αποδ.: Η απόδειξη είναι έξω από τις δυνατότητες του μαθήματος. $\square$

Πόρισμα: Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ισχύει

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Αποδ.: Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, από τον ορισμό, υπάρχει πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$. Παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(I_n) \implies \det(A) \det(A^{-1}) = 1 \\ &\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \square \end{aligned}$$

Πρόταση 4: Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{K})$, έχουμε

$$\det A^t = \det A.$$

Αποδ.: Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ και $A^t = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A σύμφωνα τον τύπο του αναπτύγματος κατά την i -γραμμή:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad (1).$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A^t σύμφωνα με τον τύπο του αναπτύγματος κατά την j -στήλη:

$$\det(A^t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{ij} \det(A^t(i|j)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)).$$

Όμως $A^t(i|j) = (A(j|i))^t$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det((A(j|i))^t) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A(i|j))^t) \quad (2). \end{aligned}$$

Η απόδειξη της πρότασης γίνεται με επαγωγή στο n . Για $n = 2$, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Τότε $A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Προφανώς έχουμε:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \det(A^t).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $\det(A(i|j)) = \det((A(i|j))^t)$, άρα από τις εξισώσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\det A^t = \det A. \square$$

Παρατήρηση: Η πρόταση 4 λέει ότι αν αλλάξουμε τις γραμμές από τις στήλες σε έναν πίνακα τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει. Συνεπώς οι ιδιότητες (προτάσεις 1,2,3) ισχύουν και αν αντικαταστήσουμε τη λέξη γραμμές από τη λέξη στήλες.

Πρόταση 5: Αν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ είναι ένας άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας $n \times n$ τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Αποδ.: Έστω ότι ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Από τον τύπο του αναπτύγματος ως προς την πρώτη στήλη έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3n} \\ 0 & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Η απόδειξη για τον κάτω τριγωνικό πίνακα είναι αντίστοιχη. $\square$

Συζυγής (προσαρτημένος) πίνακας-υπολογισμός αντίστροφου πίνακα.

Έστω $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ένας πίνακας $n \times n$. Ονομάζουμε **συμπαράγοντα** ή **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij} το στοιχείο

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

Από το πόρισμα 1 ξέρουμε ότι:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij}. \quad (1)$$

Ορισμός: Ονομάζουμε **συζυγή** (προσαρτημένο) πίνακα του A (συμβολισμός $\text{adj} A$) τον πίνακα $n \times n$:

$$(\text{adj} A)_{ij} = c_{ji}.$$

Έχουμε $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij}$. Για $j \neq k$, αντικαθιστούμε την j -στήλη του A από την k -στήλη και ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει B . Τότε ο B έχει δύο ίσες στήλες. Συνεπώς, $\det B = 0$. Επειδή, για $j \neq k$, $B(i|j) = A(i|j)$ και $\beta_{ij} = \alpha_{ik}$, έχουμε:

$$0 = \det B = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \beta_{ij} \det(B(i|j)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ik} \det(A(i|j)) = \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} c_{ij}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Άρα, από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A. \quad (*)$$

Θεώρημα 4: Έστω $A \in M_n(k)$. Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\det A \neq 0$. Επιπλέον έχουμε

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A.$$

Αποδ.: Θέτουμε $\operatorname{adj} A = (c'_{ij})$, όπου $c'_{ij} = c_{ji}$. Από την (*) έχουμε,

$$((\operatorname{adj} A)A)_{jk} = \sum_{i=1}^n c'_{ji} \alpha_{ik} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A.$$

Συνεπώς $(\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$. Θα δείξουμε ότι $A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$. Έχουμε, $(A^t)(i|j) = (A(j|i))^t$. Κατά συνέπεια $(-1)^{i+j} \det(A^t)(i|j) = (-1)^{i+j} \det(A(j|i))^t$. Δηλαδή,

$$\operatorname{adj} A^t = (\operatorname{adj} A)^t.$$

Συνεπώς, $(\operatorname{adj} A^t)A^t = (\det A^t)I = (\det A)I$. Όμως, $(\operatorname{adj} A^t)A^t = (A(\operatorname{adj} A))^t = A(\operatorname{adj} A)$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$.

Συνεπώς, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $AA^{-1} = I_n$. Άρα παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη της ισότητας θα έχουμε $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ και από το θεώρημα 3 προκύπτει ότι $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$. Συνεπώς $\det(A) \neq 0$.

Αντίστροφα, αν $\det(A) \neq 0$ από τους τύπους που αποδείξαμε παραπάνω: $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A.$$

□

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων αναπτύσσοντας αυτές κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Να υπολογίσετε τη $n \times n$ ορίζουσα:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

3. Αν $\det(A) \neq 0$, τότε $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3.$$

5. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

6. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Δείξτε ότι αν n είναι περιττός αριθμός και A ένας αντισυμμετρικός πίνακας $n \times n$, τότε $\det(A) = 0$.

10. Δείξτε ότι αν A είναι ένας ορθογώνιος πίνακας τότε $\det(A) = \pm 1$.

11. Έστω A, B δύο μη μηδενικοί τετραγωνικοί πίνακες. Δείξτε ότι αν $A \cdot B = \mathbf{0}$ τότε $\det(A) = \det(B) = 0$.

12. Έστω $i \neq j$. Δείξτε ότι αν σε έναν πίνακα αλλάξω την i με την j γραμμή τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.