

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ I

1. Θεωρούμε τον πίνακα  $A$  με πραγματικούς αριθμούς:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του  $A$  και η διάσταση του χώρου  $V(\lambda)$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$ .

2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους της γραμμικής απεικόνισης  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  με  $f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ .

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιόχωρους των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix}.$$

4. Να εξετάσετε αν είναι τριγωνοποιήσιμος ο πίνακας  $A$  του  $M_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Έστω  $A$  ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $n \times n$ . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A^{-1}$ , αν γνωρίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

6. Έστω  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ένας πίνακας  $n \times n$  με στοιχεία στο  $\mathbb{C}$ . Δείξτε ότι η ορίζουσα του  $A$  ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του  $A$ .

7. Εξετάστε αν η παρακάτω γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z).$$

Να υπολογισθούν οι διαστάσεις των ιδιόχωρων.

8. Εξετάστε αν ο παρακάτω πίνακας του  $M_3(\mathbb{C})$  είναι διαγωνοποιήσιμος:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Αφού αποδείξετε ότι ο πίνακας  $A \in M_3(\mathbb{R})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος, να βρεθεί ένας πίνακας  $P \in M_3(\mathbb{R})$  αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος.

10. Να υπολογισθεί ο πίνακας  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , όπου  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

11. Αποδείξτε ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ , η γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (ax + y, x + ay)$ , είναι διαγωνοποιήσιμη.

12. Έστω  $f : V \rightarrow V$  γραμμική απεικόνιση. Η  $f$  λέγεται μηδενοδύναμη αν υπάρχει  $m \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $f^m = 0$ . Αν  $f$  είναι μηδενοδύναμη εξετάστε αν η  $f$  διαγωνοποιείται.