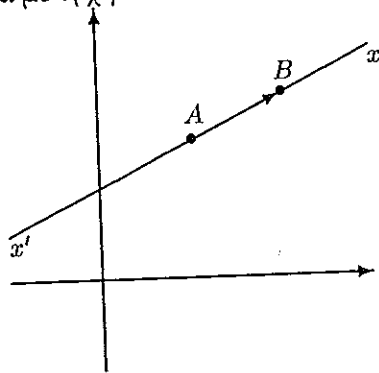


III. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

3.1. Διανύσματα στο επίπεδο και στο χώρο.

Ορισμός 3.1.1: Ένα ζεύγος σημείων (A, B) του επιπέδου ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου τα άκρα θεωρούνται "διατεταγμένα": Το A πρώτο και το B δεύτερο. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται εφαρμοσμένο διάνυσμα με αρχή A και τέλος B .



(i) Διεύθυνση του (A, B) λέγεται η διεύθυνση της ευθείας xx' που διέρχεται από το AB .

(ii) Φορά του (A, B) λέγεται η φορά της ημιευθείας Ax .

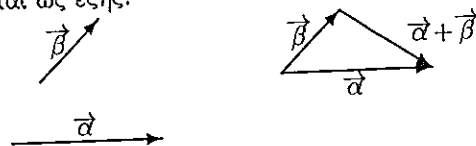
(iii) Μέτρο του (A, B) λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων ορίζουμε την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας:

$(A, B) \sim (C, D) \iff$ Τα (A, B) και (C, D) έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.

Ορισμός 3.1.2: Κάθε κλάση ισοδυναμίας που δημιουργείται με τη σχέση $\sim$ λέγεται ελεύθερο διάνυσμα (ή απλά διάνυσμα) στο επίπεδο. Θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του (A, B) με $\vec{AB}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$ το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου.

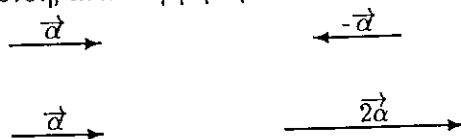
Στο σύνολο $\mathcal{E}$ μπορούμε να ορίσουμε δύο πράξεις. Την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί διάνυσμα. Η πρόσθεση διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:



Το άθροισμα μεταξύ των ελεύθερων διανυσμάτων ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$,
- (ii) $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}$,
- (iii) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \quad \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$,
- (iv) $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}, \exists \vec{\alpha}' \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{\alpha}' + \vec{\alpha} = \vec{0}$.

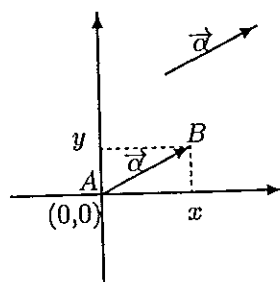
Έστω $\vec{\alpha}$ ένα ελεύθερο διάνυσμα και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού $\lambda > 0$ επί $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα $\lambda \vec{\alpha}$ το οποίο έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{\alpha}$ και μέτρο ίσο με λ φορές το μέτρο του $\vec{\alpha}$. Αν τώρα $\lambda < 0$ το $\lambda \vec{\alpha}$ έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά με το $\vec{\alpha}$ και μέτρο ίσο με λ φορές το μέτρο του $\vec{\alpha}$.



Ο πολλαπλασιασμός αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ επί ελεύθερο διάνυσμα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$,
- (ii) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\alpha} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$,
- (iii) $\lambda(\mu \vec{\alpha}) = (\lambda \mu) \vec{\alpha} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$,
- (iv) $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}, 1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Μπορούμε να αναπαράστησουμε κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{AB}$ μ' ένα ζεύγος συντεταγμένων (x, y) στο $\mathbb{R}^2$: Πράγματι κάθε κλάση ισοδυναμίας ελεύθερων διανυσμάτων έχει έναν αντιπρόσωπο που ξεκινά από την αρχή των αξόνων. Αντιστοιχούμε λοιπόν σ' αυτή την κλάση τις συντεταγμένες (x, y) της τελικής κορυφής του διανύσματος (βλ. το παρακάτω σχήμα):



Αντίστροφα, μπορούμε σε κάθε ζεύγος συντεταγμένων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ να αντιστοιχίσουμε την κλάση που έχει για αντιπρόσωπο το διάνυσμα με αρχική κορυφή το $(0, 0)$ και τελική το (x, y) . Έτσι έχουμε μια 1-1 και «επί» αντιστοιχία μεταξύ

των ελεύθερων διανυσμάτων και του $\mathbb{R}^2$. Επομένως έχουμε

$$\{ \text{Ελεύθερα διανύσματα στο επίπεδο} \} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Όμοια βρίσκουμε την αντιστοιχία στο χώρο

$$\{ \text{Ελεύθερα διανύσματα στο χώρο} \} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3.$$

3.2. Ορισμός διανυσματικών χώρων.

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε την έννοια του ελεύθερου διανύσματος και του συνόλου των ελεύθερων διανυσμάτων, εισάγοντας την έννοια του διανυσματικού χώρου του οποίου τα στοιχεία θα ονομάζουμε διανύσματα. Ο ορισμός του διανυσματικού χώρου θα βασιστεί στις ιδιότητες των ελεύθερων διανυσμάτων που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 3.2.1: Διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος υπεράνω ενός σώματος k ($k = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ονομάζουμε ένα σύνολο V , του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται διανύσματα, εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

α) Η πρώτη πράξη ονομάζεται πρόσθεση διανυσμάτων, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Αν $u, v \in V$ τότε $u + v \in V$ (λέμε ότι ο V είναι "κλειστός" ως προς την πρόσθεση).

(ii) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης).

(iii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης).

(iv) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$, ονομαζόμενο μηδενικό στοιχείο, τέτοιο ώστε $u + 0 = 0 + u = u$, $\forall u \in V$.

(v) Για κάθε στοιχείο $v \in V$, υπάρχει ένα στοιχείο $(-v) \in V$, ονομαζόμενο αντίθετο του v , τέτοιο ώστε $v + (-v) = 0 = (-v) + v$.

β) Η δεύτερη πράξη ονομάζεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός (πολλαπλασιασμός αριθμού $\lambda \in k$ επί διανύσματος $v \in V$) και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\forall \lambda \in k, v \in V$, το στοιχείο λv ανήκει στο V . Ονομάζουμε το λv (βαθμωτό) πολλαπλάσιο του λ επί το v .

(ii) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall \lambda \in k, u, v \in V$,

(iii) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall \lambda, \mu \in k, v \in V$,

(iv) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall \lambda, \mu \in k, v \in V$,

(v) $1v = v$, $\forall v \in V$.

Παραδείγματα (Διανυσματικών χώρων):

(i) Το σύνολο $\mathbb{R}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(ii) Το σύνολο $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{C}$.

- (iii) Το σύνολο $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$.
- (iv) Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ υπεράνω του $\mathbb{R}$.
- (v) Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (vi) Έστω $k[x]_n$ το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x βαθμού $\leq n$, με συντελεστές στο k , δηλαδή:

$$k[x]_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n, \alpha_n \neq 0, \alpha_i \in k \quad (i = 1, 2, \dots, n)\}.$$

Το $k[x]_n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του k .

(vii) Οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(viii) Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις με πραγματικές τιμές και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(ix) Το σύνολο των ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων:

$$\{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty\}$$

υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(x) Το σύνολο $M_n(k)$ όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο k είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του k .

Παρατήρηση: Είναι φανερό εδώ ότι ο όρος "διάνυσμα" έχει εδώ ευρύτερη σημασία. «Διάνυσμα» δεν είναι μόνο ένα ελεύθερο διάνυσμα του E , αλλά και μια συνάρτηση, ένας πίνακας, ένα πολυώνυμο κ.λ.π.

3.3 Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες που είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 3.3.1: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του k . Τότε:

- (a) Το μηδενικό στοιχείο $0 \in V$ (βλ. 3.2.1(α)(iv)) είναι μοναδικό.
- (b) Αν $v \in V$, τότε το αντίθετο στοιχείο $(-v) \in V$ (βλ. 3.2.1(α)(v)) είναι μοναδικό.
- (c) Αν $u + v = u + w$, τότε $v = w$, $\forall u, v, w \in V$ (ιδιότητα της διαγραφής).
- (d) Αν $u, v \in V$, τότε η εξίσωση $u + x = v$ έχει μια μοναδική λύση: $x = v - u \in V$.
- (e) $-(-v) = v \quad \forall v \in V$.
- (f) $0.v = 0 \quad \forall v \in V$.
- (g) $-(\lambda v) = -(\lambda)v = \lambda(-v)$ και $(-\lambda)(-v) = (\lambda v) \quad \forall \lambda \in k, v \in V$.

Αποδ.: (a) Έστω $0' \in V$ ένα άλλο μηδενικό στοιχείο. Τότε από 3.2.1(α)(iv) έχουμε $v + 0' = v = 0' + v \quad \forall v \in V$. Επομένως για $v = 0$ και $v = 0'$ παίρνουμε $0 = 0'$.

(b) Έστω v' ένα αντίθετο του v , δηλαδή $v' + v = v + v' = 0$ (*). Εξ' ορισμού έχουμε $(-v) + v = v + (-v) = 0$ (**). Τότε,

$$v' = v' + 0 \quad \text{από 3.2.1(α)(iv)}$$

$$\begin{aligned}
&= v' + (v + (-v)) \quad \text{από } (***) \\
&= (v' + v) + (-v) \\
&= 0 + (-v) \quad \text{από } (*) \\
&= -v
\end{aligned}$$

(c) Αν $u + v = u + w \quad \forall u, v, w \in V$, τότε $(-u) + (u + v) = (-u) + (u + w)$ και κατά συνέπεια $v = w$.

(d) Επαληθεύουμε ότι η $x = (-u) + v$ είναι μια λύση του συστήματος. Πράγματι: $u + ((-u) + v) = (u + (-u)) + v = 0 + v = v$. Επομένως η $x = (-u) + v$ είναι μια λύση του συστήματος. Αποδεικνύουμε ότι είναι μοναδική. Έστω x' μια άλλη λύση της εξίσωσης. Τότε $u + x = u + x'$ και από την (c) παίρνουμε $x = x'$.

(e) Έστω $v \in V$, έχουμε $(-v) + (-(-v)) = 0 = (-v) + v$ εξ' ορισμού. Επομένως από τη (c) παίρνουμε $-(-v) = v$.

(f) Έστω $v \in V$.

$$0.v = (0 + 0).v = 0.v + 0.v.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε $0.v = 0 + 0.v$. Επομένως από την (a) παίρνουμε $0 = 0.v$.

(g) Έστω $\lambda \in k$, και $v \in V$. Από τον ορισμό 3.2.1(a)(v) έχουμε $(\lambda v) + (-\lambda v) = 0$ και $v + (-v) = 0$. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $\lambda v + \lambda(-v) = \lambda.0 = 0$ από την (f). Επομένως από την πρώτη εξίσωση και από το (b) συμπεραίνουμε ότι $(-\lambda v) = \lambda(-v)$. Επίσης $\lambda + (-\lambda) = 0$ και έτσι από την (f) έχουμε $(\lambda + (-\lambda))v = \lambda v + (-\lambda)v = 0 = \lambda v + (-\lambda v)$, άρα $(-\lambda)v = (-\lambda v)$. Τέλος, $(-\lambda)(-v) = \lambda(-(-v)) = \lambda v$ από την (e). $\square$

3.4 Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3.4.1: Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- (1) αν $u, v \in U$, τότε $u + v \in U$,
- (2) αν $u \in U$ και $\lambda \in k$, τότε $\lambda u \in U$.

Αν το U ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη θα λέμε ότι το U είναι «κλειστό» ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Αν το U ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη θα λέμε ότι το U είναι «κλειστό» ως προς την πράξη του (βαθμωτού) πολλαπλασιασμού.

Πρόταση 3.4.2 Εάν U είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V τότε ο U είναι ο ίδιος ένας διανυσματικός χώρος εάν ορίσουμε την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως στον V .

Αποδ.: Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (α)(i) και (β)(i) ικανοποιούνται από την υπόθεση. Επίσης οι συνθήκες (α)(ii), (α)(iii), (β)(ii), (β)(iii), (β)(iv), (β)(v) ικανοποιούνται διότι το U είναι υποσύνολο του V και το V είναι διανυσματικός χώρος. Αποδεικνύουμε τα (α)(iv) και (α)(v). Πράγματι, εφόσον το U είναι μη κενό θεωρώ ένα στοιχείο u του U . Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι το $0.u = 0 \in U$. Επίσης από την υπόθεση και από το 3.3.1(g) έχουμε ότι $-1.u = -u \in U$. Άρα ο

U είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος. $\square$

3.5 Γραμμικός συνδιασμός διανυσμάτων

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος k .

Ορισμός 3.5.1 Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n$ διανύσματα του V . Ονομάζουμε γραμμικό συνδιασμό των $v_1, v_2, \dots, v_n$ κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι αριθμοί του k .

Πρόταση 3.5.2 Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n$ διανύσματα του V . Τότε το υποσύνολο του V :

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k\}$$

είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αποδ.: Έστω $u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ και $u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$ δύο τυχαία διανύσματα του U . Τότε,

$$u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$$

είναι ένας γραμμικός συνδιασμός των $v_1, v_2, \dots, v_n$. Επομένως, $u_1 + u_2 \in U$.

Έστω τώρα $\lambda \in k$ και $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ ένα τυχαίο διάνυσμα του U . Έχουμε ότι

$$\lambda u = (\lambda \lambda_1)v_1 + (\lambda \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda \lambda_n)v_n$$

ανήκει στο U . $\square$

Ορισμός 3.5.3: Ονομάζουμε τον υπόχωρο

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k\},$$

υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$. Θα τον συμβολίζουμε:

$$U = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle.$$

Πρόταση 3.5.4: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V . Τότε και ο $U \cap W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αποδ.: Έστω $u, v \in U \cap W$. Τότε $u \in U$ και $v \in U$, συνεπώς επειδή ο U είναι διανυσματικός χώρος, $u + v \in U$. Επίσης $u \in W$ και $v \in W$, άρα επειδή ο W είναι διανυσματικός χώρος, $u + v \in W$. Κατά συνέπεια $u + v \in U \cap W$. Όμοια βρίσκουμε ότι αν $u \in U \cap W$ και $\lambda \in k$, τότε $\lambda u \in U \cap W$. $\square$

Πόρισμα 3.5.5: Έστω $U_1, U_2, \dots, U_k$ k διανυσματικοί υπόχωροι του V . Τότε και ο $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αποδ.: Με επαγωγή στο k , χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.5.4. $\square$

Ορισμός 3.5.6: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V . Ορίζουμε το άθροισμα των U, W ως το σύνολο

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Πρόταση 3.5.7: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V . Τότε και το σύνολο $U + W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αποδ.: Έστω $c_1, c_2 \in U + W$. Γράφουμε $c_1 = u_1 + w_1$ και $c_2 = u_2 + w_2$, όπου $u_1, u_2 \in U$ και $w_1, w_2 \in W$. Τότε

$$c_1 + c_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2),$$

συνεπώς $c_1 + c_2 \in U + W$. Έστω τώρα $\lambda \in k$ και $c = u + w \in U + W$. Έχουμε

$$\lambda c = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w,$$

άρα $\lambda c \in U + W$. $\square$

Πόρισμα 3.5.8: Έστω $U_1, U_2, \dots, U_k$ k διανυσματικοί υπόχωροι του V . Τότε και ο $U_1 + U_2 + \dots + U_k$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αποδ.: Με επαγωγή στο k , χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.5.7. $\square$

Ορισμός 3.5.9: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V . Ονομάζουμε ευθύ άθροισμα των U, W τον υπόχωρο C που ικανοποιεί τις δύο παρακάτω συνθήκες:

$$(i) \ C = U + W \quad \text{και}$$

$$(ii) \ U \cap W = \{0\}.$$

Θα συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα των U, W με

$$C = U \oplus W.$$

Παραδείγματα 3.5.10: (i) Έστω $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$. Τότε $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $U + W \subseteq \mathbb{R}^3$. Έστω $u = (a, b, 0) \in U$ και $w = (0, c, d) \in W$ με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Τότε $u + w = (a, b, 0) + (0, c, d) = (a, b + c, d) \in \mathbb{R}^3$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W$. Έστω $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε $v = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) \in U + W$. Άρα $\mathbb{R}^3 = U + W$.

(ii) Έστω $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ και $W' = \{(0, 0, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$. Τότε $\mathbb{R}^3 = U \oplus W'$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $U + W' \subseteq \mathbb{R}^3$. Έστω $u = (a, b, 0) \in U$ και $w = (0, 0, c) \in W'$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$. Τότε $u + w = (a, b, 0) + (0, 0, c) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W'$. Έστω $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε $v = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) \in U + W'$. Άρα $\mathbb{R}^3 = U + W'$. Επίσης $U \cap W' = \{0\}$, άρα $\mathbb{R}^3 = U \oplus W'$.

3.6 Γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος k .

Ορισμός 3.6.1: Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n$ διανύσματα του V . Λέμε ότι τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ τέτοια ώστε:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \text{ και } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Ορισμός 3.6.2: Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n$ διανύσματα του V . Λέμε ότι τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$.

Πρόταση 3.6.3: Ένα σύνολο διανυσμάτων $E = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνον αν υπάρχει ένα διάνυσμα στο E το οποίο ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.

Αποδ.: ($\Rightarrow$) Επειδή τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in k$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

Εφόσον δεν είναι όλα μηδέν μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά έτσι ώστε $\lambda_1 \neq 0$. Άρα από την προηγούμενη εξίσωση μπορούμε να πάρουμε:

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k,$$

συνεπώς $v_1 \in \langle v_2, v_3, \dots, v_k \rangle$.

($\Leftarrow$) Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $v \in V$ το οποίο γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων. Αλλάζοντας τη σειρά των $v_1, v_2, \dots, v_k$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $v = v_1$. Επομένως έχουμε:

$$v = v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_k v_k.$$

Απ' όπου παίρνουμε ότι $(-1)v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$, δηλαδή τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. $\square$

Παραδείγματα 3.6.4: (i) Τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in$

k και $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, συνεπάγεται ότι $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0 = (0, 0, \dots, 0)$. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, δηλαδή τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι γρ. ανεξάρτητα.

(ii) Οι πίνακες του $M_2(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι. Πράγματι αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ και

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

τότε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Παρατηρήσεις 3.6.5: 1) Αν k διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα $n > k$ διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

2) Αν k διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και οποιαδήποτε απ' αυτά είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Εφαρμογή (Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$)

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Αυτό το σύστημα γράφεται ως εξίσωση πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Αν θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των συντελεστών,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των αγνώστων και

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των σταθερών όρων, το σύστημα γράφεται:

$$AX = B.$$

Επίσης θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

[illegible]

το οποίο γράφεται

$$AX = 0.$$

Πρόταση : Το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνον αν $\det A = 0$.

Αποδ.: Αποδεικνύουμε την κατεύθυνση ($\Rightarrow$). Υποθέτουμε ότι $\det A \neq 0$. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και επομένως από την εξίσωση $AX = 0$ παίρνουμε $A^{-1}AX = 0$, συνεπώς $X = 0$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την μηδενική.

Αντίστροφα τώρα αποδεικνύουμε την κατεύθυνση ($\Leftarrow$). Υποθέτουμε ότι $\det A = 0$. Σύμφωνα με τη μέθοδο Gauss ο πίνακας A είναι γραμμοισοδύναμος μ' έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα A' . Επειδή $\det A = 0$, έχουμε ότι $\det A' = 0$. Επίσης, επειδή ο πίνακας A' είναι τετραγωνικός και $\det A' = 0$, έπεται ότι ο A' έχει το ηγετικό κάποιας γραμμής τουλάχιστον δύο θέσεις δεξιότερα από το ηγετικό της προηγούμενης. Άρα ο A' έχει μια γραμμή ίση με μηδέν. Επομένως υπάρχει $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $A'X = 0$. Απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $AX = 0$. Άρα το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις. $\square$

Πόρισμα : Έστω n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ v_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

Τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν $\det A \neq 0$.

Αποδ.: ($\Rightarrow$) Η εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως επειδή τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εξ' ορισμού έχουμε ότι το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική. Άρα από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι $\det A \neq 0$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα αν $\det A \neq 0$ τότε από την προηγούμενη πρόταση το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. $\square$

3.7 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος k . Θα λέμε ότι ο V είναι πεπερασμένης διάστασης αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων S του V το οποίο παράγει τον V . Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 3.7.1: Ένα πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ διανυσμάτων του V , λέγεται βάση του V αν:

- (i) τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- (ii) τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ παράγουν τον V .

Θεώρημα 3.7.2 (ύπαρξη βάσης): Έστω V ένας διανυσματικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης). Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ διανυσμάτων του V το οποίο αποτελεί βάση του V .

Αποδ.: Εφόσον ο V είναι πεπερασμένης διάστασης υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ διανυσμάτων του V που παράγει τον V , δηλ.,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V.$$

Εάν το σύνολο B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε το θεώρημα αποδείχτηκε. Υποθέτουμε τώρα ότι το B είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.6.3 υπάρχει ένα διάνυσμα v του B το οποίο είναι γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων. Συμβολίζουμε με B' το σύνολο των υπολοίπων διανυσμάτων. Έχουμε $\langle B' \rangle \subseteq \langle B \rangle$ και $\langle v \rangle \subseteq \langle B' \rangle$ (επειδή $v \in \langle B' \rangle$), άρα

$$\langle B \rangle = \langle v \cup B' \rangle \subseteq \langle v \rangle + \langle B' \rangle \subseteq \langle B' \rangle + \langle B' \rangle \subseteq \langle B' \rangle.$$

Συνεπώς $\langle B' \rangle = \langle B \rangle$. Τώρα μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχείρημά μας στο B' . Έτσι, ή το B' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε, ή είναι γραμμικώς εξαρτημένο οπότε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα ανάγουμε το πρόβλημα του B' σ' ένα σύνολο B'' κατά ένα διάνυσμα λιγότερο από το B' . Επειδή το σύνολο διανυσμάτων B από το οποίο ξεκινήσαμε είναι πεπερασμένο, το θεώρημα έπεται επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα για ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. $\square$

Πρόταση 3.7.3: Έστω $E = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων. Το E είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνον αν $v_m \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \rangle$ για κάποιο $m \leq k$.

Αποδ.: ($\Rightarrow$) Έστω $E = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ γραμμικώς εξαρτημένο. Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$. Διαλέγουμε m τον μεγαλύτερο αριθμό από το 1 έως το k τέτοιον ώστε $\lambda_m \neq 0$. Τότε εξόσω $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_k = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. Άρα λύνοντας την εξίσωση ως προς v_m , παίρνουμε

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1},$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $v_m \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \rangle$.

($\Leftarrow$) Αν για κάποιο $m \leq k$ έχουμε

$$v_m \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \rangle,$$

τότε $v_m = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{m-1} v_{m-1}$. Κατά συνέπεια $-v_m + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{m-1} v_{m-1} = 0$, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι τα $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα από την παρατήρησι, 3.6.5(1) και τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. $\square$

Πρόταση 3.7.4: Έστω $E = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του V . Έαν $F = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, τότε ο αριθμός των στοιχείων του F είναι $\leq k$.

Αποδ.: Πρέπει να δείξουμε ότι $s \leq k$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων

$$G_1 = \{u_s, v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $u_s \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, άρα από την πρόταση 3.6.3 το G_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.7.3 συνάγουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα v του G_1 που να γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των προηγούμενων. Το v δεν μπορεί να είναι το u_s διότι σ' αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να ισούται με μηδέν (όμως $u_s \neq 0$ διότι αλλιώς το F θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένο). Επομένως το v ισούται με κάποιο από τα $v_1, v_2, \dots, v_k$. Αλλάζοντας τη σειρά τους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $v = v_k$. Έτσι

$$v_k \in \langle u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \rangle.$$

Έστω τώρα

$$E_1 = \{u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\langle E_1 \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$. Θέτουμε

$$G_2 = \{u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}.$$

Επειδή $u_{s-1}, u_s \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, το G_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.7.3 έχουμε ότι υπάρχει $v \in G_2$ τέτοιο ώστε το v να ανήκει στον

υπόχωρο που παράγουν τα προηγούμενα. Όμως το v δεν μπορεί να είναι το u_{s-1} (διότι $u_{s-1} \neq 0$), ούτε το u_s διότι τα u_{s-1}, u_s είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα το v ισούται με ένα από τα $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$. Αλλάζοντας τη σειρά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v = v_{k-1}$. Άρα $v_{k-1} \in \langle u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-2} \rangle$ και κατά συνέπεια

$$\langle u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-2} \rangle = \langle u_s, v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle.$$

Υποθέτουμε ότι $s > k$. Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για k βήματα, παίρνουμε

$$\langle u_{s-k}, u_{s-k+1}, \dots, u_s \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle.$$

Άρα $u_{s-k-1} \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \langle u_{s-k}, u_{s-k+1}, \dots, u_s \rangle$. Όμως καταλήξαμε σε άτοπο διότι το $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ εξ' υποθέσεως είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άρα $s \leq k$. $\square$

Θεώρημα 3.7.5: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης) και B, B' δύο βάσεις του V . Τότε οι B, B' περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Αποδ.: Έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = V.$$

Όμως το B είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$, συνεπώς από την πρόταση 3.7.4 παίρνουμε $n \leq m$. Όμοια επειδή το B' είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, έπεται ότι $m \leq n$. Άρα $m = n$. $\square$

Ορισμός 3.7.6: Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος k . Ο αριθμός των διανυσμάτων κάθε βάσης του V ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με $\dim_k V$ (ή απλά με $\dim V$).

Παραδείγματα (i) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(ii) $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$.

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

(iv) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Πόρισμα 3.7.7: Η βάση κάθε διανυσματικού χώρου περιέχει μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Αποδ.: Έστω $v_1, v_2, \dots, v_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V . Τότε επειδή ο αριθμός των διανυσμάτων της βάσης ισούται με $\dim V$, από την πρόταση 3.7.4, συμπεραίνουμε ότι $k \leq \dim V$. $\square$

Πρόταση 3.7.8: Έστω $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο ενός διανυσματικού χώρου V . Τότε υπάρχουν διανύσματα $y_1, y_2, \dots, y_{n-m}$ του V τέτοια ώστε το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n-m}\}$ να αποτελεί βάση του V .

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι ο V παράγεται από το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Επειδή τα $x_1, x_2, \dots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την πρόταση 3.7.4 συμπεραίνουμε ότι $m \leq n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ παράγουν τον V , επομένως και το S παράγει τον V . Αν το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε η πρόταση αποδείχτηκε. Αν όμως είναι γραμμικώς εξαρτημένο τότε από την πρόταση 3.7.3 ένα από τα διανύσματα του S γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων. Αυτό πρέπει να είναι ένα από τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ διότι τα $x_1, x_2, \dots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αλλάζοντας τη σειρά των $v_1, v_2, \dots, v_n$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό το διάνυσμα είναι το v_n . Αν θέσουμε

$$S' = \{x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\},$$

τότε $v_n \in \langle S' \rangle$ και κατά συνέπεια το S' παράγει τον V . Αν τώρα το S' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε η πρόταση αποδείχτηκε. Αν το S' δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο S' . Έτσι όμοια βρίσκουμε ένα σύνολο S'' κατά ένα διάνυσμα λιγότερο από το S' το οποίο περιέχει τα $x_1, x_2, \dots, x_m$ και παράγει τον V . Αν το S'' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο η πρόταση αποδείχτηκε αλλιώς συνεχίζουμε τη διαδικασία για το S'' . Επειδή το σύνολο S που ξεκινήσαμε είναι πεπερασμένο αυτή η διαδικασία μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα δώσει ένα σύνολο το οποίο θα είναι βάση του V και θα περιέχει τα $x_1, x_2, \dots, x_m$. $\square$

Πόρισμα 3.7.9: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n .

(i) Κάθε σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V αποτελεί βάση του.

(ii) Κάθε σύνολο n διανυσμάτων που παράγουν τον V αποτελεί βάση του.

Αποδ.: (i) Από την παραπάνω πρόταση (3.7.8), κάθε σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V . Επειδή όμως $\dim V = n$, έπεται ότι τα n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν βάση του V .

(ii) Από την απόδειξη του θεωρήματος 3.7.2, κάθε σύνολο που παράγει τον V περιέχει μια βάση του. Επειδή όμως $\dim V = n$, έπεται ότι τα n διανύσματα που παράγουν τον V αποτελούν βάση του. $\square$

Πόρισμα 3.7.10: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n . Έστω U διανυσματικός υπόχωρος του V διάστασης n . Τότε $U = V$.

Αποδ.: Επειδή $\dim U = n$, υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του U . Από το πόρισμα 3.7.9(i) συμπεραίνουμε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ αποτελεί βάση του V . Άρα

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = U.$$

Λήμμα 3.7.11 Έστω U υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V . Τότε

$$\dim U \leq \dim V.$$

Αποδ.: Έστω $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ μια βάση του U και $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Επειδή τα $u_1, u_2, \dots, u_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ από την πρόταση 3.7.4 έπεται ότι $m \leq n$, δηλαδή $\dim U \leq \dim V$. $\square$

Θεώρημα 3.7.12 Έστω W_1, W_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V . Τότε

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Αποδ.: Από την πρόταση 3.5.4 έχουμε ότι το $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V . Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ μια βάση του $W_1 \cap W_2$. Από την πρόταση 3.7.8 συμπεραίνουμε ότι η βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ μπορεί να επεκταθεί σε δύο βάσεις του W_1 και W_2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι μια βάση του W_1 και το $\{v_1, v_2, \dots, v_r, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι μια βάση του W_2 . Δηλαδή $\dim W_1 = r + n$ και $\dim W_2 = r + m$. Αρχεί να δείξουμε ότι το $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι μια βάση του $W_1 + W_2$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\dim(W_1 + W_2) = r + n + m$.

Είναι προφανές ότι το S παράγει τον $W_1 + W_2$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^n \lambda'_j x_j + \sum_{k=1}^m \lambda''_k y_k = 0.$$

Τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^n \lambda'_j x_j = - \sum_{k=1}^m \lambda''_k y_k \in W_1 \cap W_2.$$

Εφόσον το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι μια βάση του $W_1 \cap W_2$ υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in K$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^m \lambda''_k y_k = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i.$$

Εφόσον τώρα το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_r, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι μια βάση του W_2 και συνεπώς είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, έχουμε $\lambda''_1 = \dots = \lambda''_m = \mu_1 = \dots = \mu_r = 0$. Όμοια μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\lambda'_1 = \dots = \lambda'_n = 0.$$

Άρα έχουμε $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ επειδή το $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι μια βάση του $W_1 \cap W_2$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα το S είναι μια βάση του $W_1 + W_2$.

Θεώρημα 3.7.13: Έστω V διανυσματικός χώρος και $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ βάση του V . Τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων της βάσης.

Αποδ.: Εφόσον $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι βάση του V , έχουμε $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. Άρα επειδή $v \in V$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ τέτοια ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad (1).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in k$ τέτοια ώστε

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \quad (2).$$

Αν αφαιρέσουμε την (2) από την (1) έχουμε

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$

και επειδή τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έχουμε $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$. $\square$

Ορισμός 3.7.14: Έστω V διανυσματικός χώρος και $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα για κάθε $v \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ τέτοια ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Ονομάζουμε τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ συντεταγμένες του $v \in V$ ως προς τη βάση B .

Παραδείγματα: (i) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $(1, 1, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ είναι $1, 0, 0$.

(ii) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $2 - x$ του $\mathbb{R}[x]_1$ ως προς τη βάση $\{1 - x, 1 + x\}$ είναι $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.