

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ (ή γραμμικοί μετασχηματισμοί)

3.1. Ορισμός γραμμικής απεικόνισης.

Στο κεφάλαιο αυτό όλοι οι διανυσματικοί χώροι που αναφέρονται είναι πεπερασμένης διάστασης. Με \mathbb{k} συμβολίζουμε το σώμα των ρητών ή των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών, δηλαδή $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή \mathbb{R} ή \mathbb{C} .

Ορισμός 3.1.1: Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} . Μια **γραμμική απεικόνιση** (ή γραμμικός μετασχηματισμός) f από τον V στον W είναι μια απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(v + v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v' \in V, \\ (ii) \quad & f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall v \in V. \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W . Αν $W = V$ συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο V με $\mathcal{L}(V)$. Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ ονομάζεται **ενδομορφισμός** διανυσματικών χώρων.

Παρατηρήσεις: (i) Αν f είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Πράγματι, εξ ορισμού έχουμε $f(v + v') = f(v) + f(v')$ για κάθε $v, v' \in V$. Άρα για $v = v' = \mathbf{0}$ έχουμε:

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) = 2f(\mathbf{0}),$$

και κατά συνέπεια $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Επομένως αν $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ τότε η f **ΔΕΝ** είναι γραμμική απεικόνιση.

(ii) Αν f είναι γραμμική απεικόνιση τότε:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

Πράγματι από τις δύο ιδιότητες του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i). \end{aligned}$$

(iii) Οι ιδιότητες (i), (ii) του ορισμού 3.1.1 μπορούν να γραφούν ισοδύναμα σε μια ιδιότητα ως εξής:

$$f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + f(v') \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall v, v' \in V.$$

Θεώρημα 3.1.2 (Υπαρξης γρ. απεικόνισης): Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} . Αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι μια βάση του V και $\{w_1, \dots, w_n\}$ είναι n οποιαδήποτε διανύσματα του W , τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ τέτοια ώστε $f(v_i) = w_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Αποδ.: Αν $v \in V$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ (μοναδικά ορισμένα) τέτοια ώστε $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ ως εξής:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) := \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \quad (*).$$

Αν $v, v' \in V$, $\lambda \in \mathbb{k}$, τότε γράφουμε $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ με $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{k}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\lambda v + v') &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \mu_i v_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n ((\lambda \lambda_i) + \mu_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\lambda \lambda_i) + \mu_i) w_i \quad \text{από } (*) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \\ &= \lambda f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμμική απεικόνιση. Από την εξίσωση $(*)$ προκύπτει ότι $f(v_i) = w_i$ για $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Αποδεικνύουμε τώρα την μοναδικότητα. Αν $g : V \rightarrow W$ είναι μία άλλη γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $g(v_i) = w_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$ και αν $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του V , τότε

$$\begin{aligned} g(v) &= g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \\ &= f(v). \end{aligned}$$

Άρα $g = f$. \square

Παρατήρηση: Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι για να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ αρκεί να ορίσουμε την τιμή της f σε μια

βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του V . Δηλαδή, αν γνωρίζουμε την τιμή μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow W$ σε μια βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του V , τότε γνωρίζουμε την τιμή της f σε κάθε $v \in V$.

Παραδείγματα: (i) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε: $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 1)$ και $f(0, 0, 1) = (2, -3)$. Να υπολογιστεί η τιμή της f σε κάθε διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2) + y(-1, 1) + z(2, -3) \\ &= (x - y + 2z, 2x + y - 3z). \end{aligned}$$

Άρα $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y - 3z)$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Δείχνουμε ότι η f είναι γραμμική. Έχουμε

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') + (y + y'), (y + y') - (z + z')) \\ &= (x + y, y - z) + (x' + y', y' - z') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{k}$, $f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z)$. Άρα η f είναι γραμμική απεικόνιση.

(iii) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + 1, y).$$

Η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση διότι:

$$f(2(1, 0, 0)) = (3, 0),$$

ενώ $f(1, 0, 0) = (2, 0)$ και κατά συνέπεια

$$2f(1, 0, 0) = (4, 0) \neq (3, 0).$$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: βλέπουμε ότι $f(0, 0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$, άρα από την παρατήρηση (i) η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

(iv) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y) = (x^2, y^2).$$

Η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση διότι:

$$f(2(1, 1)) = f(2, 2) = (4, 4),$$

ενώ $f(1, 1) = (1, 1)$ και κατά συνέπεια

$$2f(1, 1) = (2, 2) \neq (4, 4).$$

(v) Έστω $D_n : \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ η απεικόνιση (παραγώγιση) τέτοια ώστε

$$D_n(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Η D_n είναι γραμμική απεικόνιση διότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{k}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & D_n(\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)) \\ &= D_n((\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1)x + \dots + (\lambda a_n + b_n)x^n) \\ &= \lambda a_1 + b_1 + 2(\lambda a_2 + b_2)x + \dots + n(\lambda a_n + b_n)x^{n-1} \\ &= \lambda D_n(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + D_n(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n). \end{aligned}$$

3.2. Πίνακας γραμμικής απεικόνισης.

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} , με $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ και $\dim_{\mathbb{k}} W = m$. Έστω

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

διατεταγμένες βάσεις των V, W αντίστοιχα. Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$. Οι εικόνες των διανυσμάτων της βάσης $f(v_j)$ είναι διανύσματα του W , για $j = 1, 2, \dots, n$, επομένως υπάρχουν $\alpha_{ij} \in \mathbb{k}$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) τέτοια ώστε:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i.$$

Ο πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ονομάζεται **πίνακας της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}'** και τον συμβολίζουμε

$$A = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Είναι προφανές ότι ο πίνακας A της f εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Δηλαδή αν $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ είναι δύο άλλες βάσεις των V, W αντίστοιχα, τότε ο πίνακας της f ως προς αυτές τις βάσεις είναι

$$A_1 = (f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1).$$

Στο τέλος αυτής της παραγράφου (πρόταση 3.2.4) θα δούμε, για έναν ενδομορφισμό f του V ποιά είναι η σχέση των πινάκων του f , ως προς δύο διαφορετικές

βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ του V . Δηλαδή ποιά είναι η σχέση μεταξύ του $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ και του $(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

Παραπάνω αντιστοιχήσαμε σε μία γραμμική απεικόνιση f έναν πίνακα $A = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Τώρα αντίστροφα θα ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f_A : V \rightarrow W$ έτσι ώστε ο πίνακας της f_A ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}' των V, W αντίστοιχα, να είναι ο A . Ορίζουμε την απεικόνιση f_A με

$$f_A(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Τότε από το θεώρημα 3.1.2 η f_A είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που έχει αυτή την ιδιότητα. Έτσι υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathcal{L}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W και του συνόλου $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ των πινάκων $m \times n$. Δηλαδή:

$$\{A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})\} \longleftrightarrow \{f_A : V \rightarrow W \text{ γραμμική απεικόνιση}\}$$

Αν $f \in \mathcal{L}(V)$ και \mathcal{B} είναι μια βάση του V τότε θα γράφουμε $(f; \mathcal{B})$ αντί $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ για τον πίνακα του f ως προς την βάση \mathcal{B} .

Παραδείγματα: (i) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση. Υπολογίζουμε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{B}'_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) \\ f(0, 0, 1) &= (-1, 1) = -1(1, 0) + 1(0, 1). \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας της f είναι:

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τώρα δύο άλλες βάσεις των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα: $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ και $\mathcal{B}'_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1, 0, -1) &= (2, 1) = 1(1, 0) + 2(0, 1) \\ f(1, 1, 1) &= (1, 3) = 3(0, 1) + 1(1, 0) \\ f(1, 0, 0) &= (1, 2) = 2(0, 1) + 1(1, 0). \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ είναι:

$$(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

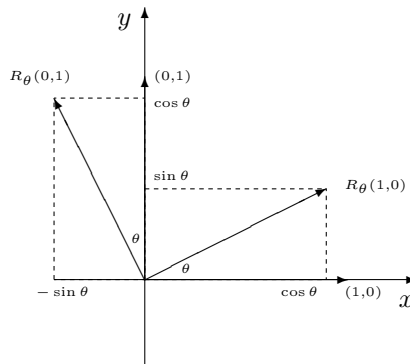
(ii) Θεωρούμε τον **ταυτοτικό** ενδομορφισμό (ταυτοτική απεικόνιση) $\text{Id} : V \rightarrow V$ με

$$\text{Id}(v) = v \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Εάν \mathcal{B} είναι μια βάση του V , είναι προφανές ότι ο πίνακας του Id ως προς την \mathcal{B} είναι ο ταυτοτικός. Δηλαδή

$$(\text{Id}; \mathcal{B}) = I.$$

(iii) Θεωρούμε την απεικόνιση $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ της στροφής ενός διανύσματος στο \mathbb{R}^2 κατά γωνία θ (βλέπε σχήμα).



Έχουμε:

$$R_\theta(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$R_\theta(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Επομένως η εικόνα ενός διανύσματος (x, y) του \mathbb{R}^2 είναι:

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η R_θ είναι γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας της R_θ ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^2 είναι:

$$(R_\theta; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(iv) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση της παραγώγισης (βλέπε Παράδειγμα (v) στην παράγραφο 3.1):

$$D_n : \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n.$$

Ο πίνακας της D_n ως προς την κανονική βάση είναι:

$$(D_n; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 3.2.1: Έστω V, V', V'' διανυσματικοί χώροι διάστασης n υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} . Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : V \rightarrow V'$ και $g : V' \rightarrow V''$. Αν $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ και \mathcal{B}'' είναι βάσεις των V, V' και V'' αντίστοιχα τότε

$$((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ και $\mathcal{B}'' = \{v''_1, v''_2, \dots, v''_n\}$.
Θέτουμε

$$A = (a_{ij}) = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \text{ και } B = (b_{ij}) = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Τότε αν $C = (c_{ij}) = AB$, έχουμε

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_j) &= g(f(v_j)) \\ &= g\left(\sum_{k=1}^n b_{kj} v'_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} g(v'_k) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \sum_{l=1}^n a_{lk} v''_l \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{lk} b_{kj}\right) v''_l \\ &= \sum_{l=1}^n c_{lj} v''_l. \end{aligned}$$

Άρα $((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'')_{lj} = c_{lj}$, δηλαδή

$$((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = AB = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'). \square$$

Πόρισμα 3.2.2: Έστω $f : V \rightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του διανυσματικού χώρου V . Ο f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πίνακας του f ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον έχουμε:

$$(f^{-1}; \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})^{-1}.$$

Αποδ.: (\implies) Υποθέτουμε ότι ο f είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $f^{-1} : V \rightarrow V$ τέτοιος ώστε

$$f \circ f^{-1} = \text{Id},$$

όπου $\text{Id} : V \rightarrow V$ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός του V . Από την παραπάνω ισότητα, αν \mathcal{B} είναι μια βάση του V , έχουμε

$$((f \circ f^{-1}); \mathcal{B}) = (\text{Id}; \mathcal{B}) = I$$

και από την πρόταση 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι

$$(f; \mathcal{B})(f^{-1}; \mathcal{B}) = (\text{Id}; \mathcal{B}) = I,$$

επομένως ο πίνακας του f είναι αντιστρέψιμος και έχουμε $(f; \mathcal{B})^{-1} = (f^{-1}; \mathcal{B})$.

(\impliedby) Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας του f ως προς μια βάση \mathcal{B} , είναι αντιστρέψιμος. Τότε αν g είναι ο ενδομορφισμός του V με πίνακα τον $(f^{-1}; \mathcal{B})$, από την πρόταση 3.2.1 έχουμε

$$((f \circ g); \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})(g; \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})(f^{-1}; \mathcal{B}) = I = (\text{Id}; \mathcal{B}),$$

άρα $f \circ g = \text{Id}$, δηλαδή ο f είναι αντιστρέψιμος. \square

Ορισμός 3.2.3: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ δύο βάσεις του V . Ονομάζουμε **πίνακα αλλαγής βάσης** από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{B}' τον πίνακα του ταυτοτικού ενδομορφισμού $\text{Id} : V \rightarrow V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Έχουμε,

$$\text{Id}(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) + (-\frac{1}{2})(0, 1, 1)$$

$$\text{Id}(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = (-\frac{1}{2})(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 1)$$

$$\text{Id}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 1) + (-\frac{1}{2})(1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 1)$$

τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{B}' είναι ο εξής:

$$(\text{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση: Επειδή ο πίνακας του ταυτοτικού ενδομορφισμού ως προς μία βάση \mathcal{B} είναι ο ταυτοτικός πίνακας από την πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι $(\text{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')(\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = I$ και κατά συνέπεια ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{B}' είναι ο αντίστροφος του πίνακα αλλαγής βάσης από τη βάση \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} .

3.2.4 Πρόταση: Έστω $f : V \rightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του διανυσματικού χώρου V . Αν $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ είναι δύο βάσεις του V και $(f; \mathcal{B}), (f; \mathcal{B}')$ οι πίνακες του f ως προς $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ αντίστοιχα τότε έχουμε:

$$(f; \mathcal{B}') = P^{-1}(f; \mathcal{B})P,$$

όπου $P = (\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} .

Αποδ.: Θεωρούμε την ακόλουθη σύνθεση συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{Id}} & V & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{\text{Id}} & V \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \end{array}.$$

Έχουμε

$$f = \text{Id} \circ f \circ \text{Id}.$$

Συνεπώς από την πρόταση 3.2.1 συνάγουμε ότι

$$(f; \mathcal{B}') = (\text{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')(f; \mathcal{B})(\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Αν θέσουμε $P = (\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ τον πίνακα αλλαγής βάσης της βάσης \mathcal{B}' στη βάση \mathcal{B} τότε ο P^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης της βάσης \mathcal{B} στη βάση \mathcal{B}' . Άρα,

$$(f; \mathcal{B}') = P^{-1}(f; \mathcal{B})P. \square$$

3.3. Ομοιότητα πινάκων.

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε (πρόταση 3.2.4) ότι δύο πίνακες A, B που αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση ικανοποιούν τη συνθήκη $A = P^{-1}BP$, όπου P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης. Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε την έννοια της ομοιότητας δύο πινάκων για να περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ των πινάκων μιας γραμμικής απεικόνισης ως προς δύο διαφορετικές βάσεις.

Ορισμός 3.3.1 Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Λέμε ότι ο A είναι **όμοιος** με τον B αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας $C \in M_n(\mathbb{k})$ πίνακας αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε:

$$A = CBC^{-1}.$$

Λήμμα 3.3.2 Η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας στον $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Για να δείξουμε ότι η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να δείξουμε ότι η ομοιότητα είναι **αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική**.

(i) Η ομοιότητα είναι αυτοπαθής: Πράγματι, ο A είναι όμοιος με τον εαυτό του διότι $A = IAI^{-1}$.

(ii) Η ομοιότητα είναι συμμετρική (δηλαδή αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε και ο B είναι όμοιος με τον A): Αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε υπάρχει $P \in M_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Άρα, $B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$, συνεπώς ο B είναι όμοιος με τον A .

(iii) Η ομοιότητα είναι μεταβατική (δηλαδή αν ο A είναι όμοιος με τον B και ο B είναι όμοιος με τον C , τότε ο A είναι όμοιος με τον C): Αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Επίσης αν ο B είναι όμοιος με τον C , τότε υπάρχει Q αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $B = QCQ^{-1}$. Άρα αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι $A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$. Δηλαδή ο πίνακας A είναι όμοιος με τον C . \square

Θεώρημα 3.3.3: Έστω V διανυσματικός χώρος διάταξης n και A, B δύο πίνακες $n \times n$. Οι πίνακες A, B αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ ως προς δύο βάσεις του V αν και μόνον αν οι A, B είναι όμοιοι.

Αποδ.: (\implies) Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ δύο βάσεις του V τέτοιες ώστε:

$$(f; \mathcal{B}) = A \text{ και } (f; \mathcal{B}') = B.$$

Έστω P ο πίνακας αλλαγής βάσης. Τότε από την πρόταση 3.2.4 έχουμε

$$A = PBP^{-1},$$

δηλαδή οι A, B είναι όμοιοι.

(\Leftarrow) Έστω A, B δύο όμοιοι πίνακες $n \times n$. Τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ βάση του V και f_A ο γραμμικός ενδομορφισμός του V τέτοιος ώστε $(f_A; \mathcal{B}) = A$. Επίσης έστω $f_P : V \rightarrow V$ ο γραμμικός ενδομορφισμός του V τέτοιος ώστε $(f_P; \mathcal{B}) = P$. Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος από το πόρισμα 3.2.2 έπεται ότι ο f_P είναι αντιστρέψιμος.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\lambda_1 f_P(v_1) + \lambda_2 f_P(v_2) + \dots + \lambda_n f_P(v_n) = \mathbf{0}.$$

Λόγω γραμμικότητας της f_P προκύπτει ότι

$$f_P(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0} = f_P(\mathbf{0}) \quad (1).$$

Όμως επειδή η f_P είναι αντιστρέψιμη έπεται ότι είναι «1-1», άρα από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$. Όμως επειδή τα $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι είναι βάση του V) έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Άρα τα διανύσματα $\{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Από το πόρισμα 2.7.9 (i) επειδή $\dim V = n$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{B}' = \{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι μια βάση του V . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την \mathcal{B}' στη \mathcal{B} ισούται με τον P . Συνεπώς από την πρόταση 3.2.4 έχουμε ότι

$$(f_A; \mathcal{B}') = P^{-1}(f_A; \mathcal{B})P = P^{-1}AP = B. \square$$

Παρατήρηση 3.3.4: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί και για γραμμικές απεικονίσεις $f : V \rightarrow W$ ως εξής: Αν $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ είναι βάσεις του V και $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1$ είναι βάσεις του W , τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P_1 = (\text{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ και $P_2 = (\text{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$ τέτοιοι ώστε

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = P_2(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')P_1^{-1}.$$

3.4 Πυρήνας και εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} . Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:

$$f : V \rightarrow W.$$

Ορισμός 3.4.1 Ονομάζουμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης f το εξής υποσύνολο του V :

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}.$$

Ορισμός 3.4.2: Ονομάζουμε **εικόνα** της f το εξής υποσύνολο του W :

$$\text{Im } f = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

Λήμμα 3.4.3: (i) Ο $\ker f$ είναι υπόχωρος του V .

(ii) Ο $\text{Im } f$ είναι υπόχωρος του W .

Αποδ.: (i) Για κάθε $v, v' \in \ker f$ έχουμε

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

άρα $v + v' \in \ker f$. Για κάθε $v \in V, \lambda \in \mathbb{k}$,

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

άρα $\lambda v \in \ker f$. Συνεπώς ο $\ker f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

(ii) Για κάθε $w_1, w_2 \in \text{Im } f$ υπάρχουν $v_1, v_2 \in V$ τέτοια ώστε

$$w_1 = f(v_1) \text{ και } w_2 = f(v_2).$$

Άρα

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \text{Im } f.$$

Για κάθε $w \in \text{Im } f, \lambda \in \mathbb{k}$ υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = f(v)$. Κατά συνέπεια $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in \text{Im } f$. \square

Λήμμα 3.4.4: Αν τα v_1, v_2, \dots, v_n παράγουν τον V , τότε τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ παράγουν τον $\text{Im } f$.

Αποδ.: Έστω $w \in \text{Im } f$. Εξ ορισμού υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = f(v)$. Επειδή τα v_1, v_2, \dots, v_n παράγουν τον V , υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Συνεπώς επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση έχουμε:

$$w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n),$$

δηλαδή το w ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$. \square

Θεώρημα 3.4.5: Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε έχουμε:

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \ker f.$$

Αποδ.: Έστω v_1, v_2, \dots, v_s μια βάση του $\ker f$. Τότε από την πρόταση 2.7.8 μπορούμε να βρούμε διανύσματα w_1, w_2, \dots, w_t του V τέτοια ώστε τα $v_1, v_2, \dots, v_s, w_1, w_2, \dots, w_t$ να αποτελούν βάση του V . Τότε από το Λήμμα 3.4.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_s), f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t) \rangle \\ &= \langle 0, 0, \dots, 0, f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t) \rangle \\ &= \langle f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t) \rangle. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t)$ αποτελούν βάση του $\text{Im } f$. Από την παραπάνω ισότητα αρκεί να δείξω ότι τα $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{k}$, τέτοια ώστε:

$$\lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) + \dots + \lambda_t f(w_t) = \mathbf{0}.$$

Θέτουμε

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_t w_t.$$

Τότε το w είναι ένα διάνυσμα του V . Έχουμε

$$f(w) = \lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) + \dots + \lambda_t f(w_t) = \mathbf{0},$$

άρα $w \in \ker f$. Επειδή τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_s είναι βάση του $\ker f$, μπορούμε να βρούμε $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε

$$w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_s v_s,$$

άρα

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_t w_t = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_s v_s,$$

απ' όπου γράφουμε ότι:

$$\mathbf{0} = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_s v_s - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_t w_t.$$

Επειδή τα $v_1, v_2, \dots, v_s, w_1, w_2, \dots, w_t$ είναι βάση του V , έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_t = 0$. Έτσι τα $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_t)$ αποτελούν βάση του $\text{Im } f$. Δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} \dim \ker f &= s, \\ \dim \text{Im } f &= t, \\ \dim V &= s + t. \square \end{aligned}$$

3.5 Τάξη πίνακα και γραμμικής απεικόνισης

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία στο σώμα \mathbb{k} . Οι στήλες $c_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ του πίνακα A , για $i = 1, 2, \dots, n$, μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα του διανυσματικού χώρου \mathbb{k}^m . Συνεπώς παράγουν έναν υπόχωρο του \mathbb{k}^m με διάσταση $\leq m$. Ορίζουμε την τάξη (rank) ενός πίνακα A ως εξής:

3.5.1 Ορισμός: Τάξη (rank) ή βαθμός ενός πίνακα A λέγεται η διάσταση του χώρου που παράγεται από τις στήλες του A και συμβολίζεται με $\text{rank}(A)$ ή $r(A)$.

3.5.2 Λήμμα: Έστω $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$, n διανύσματα του διανυσματικού χώρου \mathbb{k}^m και $P = (p_{ij})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας $m \times m$. Θετούμε

$$v'_i = P v_i = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, θεωρώντας τα v'_1, v'_2, \dots, v'_n ως διανύσματα του \mathbb{k}^m . Έστω $W = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ και $W' = \langle v'_1, v'_2, \dots, v'_n \rangle$. Τότε $\dim W = \dim W'$.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ μια βάση του W . Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f_P : W \rightarrow V$ με $f_P(w_i) = Pw_i$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}' = \{f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)\}$ είναι μια βάση του W' .

α) Θα δείξουμε ότι τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)$ παράγουν το W' : Έστω $w' \in W'$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} w' &= \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \dots + \lambda_n v'_n \\ &= \lambda_1 P v_1 + \lambda_2 P v_2 + \dots + \lambda_n P v_n. \end{aligned}$$

Όμως επειδή τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι διανύσματα του W και $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ είναι μια βάση του W , έπεται ότι κάθε v_i (για $i = 1, 2, \dots, n$) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των w_1, w_2, \dots, w_k . Δηλαδή υπάρχουν $\mu_{ij} \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε:

$$v_i = \mu_{i1} w_1 + \mu_{i2} w_2 + \dots + \mu_{ik} w_k,$$

για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, k$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} w' &= \lambda_1 P(\mu_{11} w_1 + \dots + \mu_{1k} w_k) + \lambda_2 P(\mu_{21} w_1 + \dots + \mu_{2k} w_k) + \dots + \lambda_n P(\mu_{n1} w_1 + \dots + \mu_{nk} w_k) \\ &= (\lambda_1 \mu_{11} + \lambda_2 \mu_{21} + \dots + \lambda_n \mu_{n1}) P w_1 + \dots + (\lambda_1 \mu_{1k} + \lambda_2 \mu_{2k} + \dots + \lambda_n \mu_{nk}) P w_k \\ &= (\lambda_1 \mu_{11} + \lambda_2 \mu_{21} + \dots + \lambda_n \mu_{n1}) f_P(w_1) + \dots + (\lambda_1 \mu_{1k} + \lambda_2 \mu_{2k} + \dots + \lambda_n \mu_{nk}) f_P(w_k). \end{aligned}$$

Άρα τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)$ παράγουν το W' .

β) Δείχνουμε ότι τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: Έστω

$$\lambda_1 f_P(w_1) + \lambda_2 f_P(w_2) + \dots + \lambda_k f_P(w_k) = \mathbf{0}.$$

Λόγω γραμμικότητας της f_P προκύπτει ότι

$$f_P(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k) = \mathbf{0} = f_P(\mathbf{0}) \quad (1).$$

Όμως επειδή η f_P είναι αντιστρέψιμη (διότι ο P είναι αντιστρέψιμος) έπεται ότι είναι «1-1», άρα από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k = \mathbf{0}$. Όμως επειδή τα $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι είναι βάση του W) έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Άρα τα διανύσματα $\{f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Συνεπώς, τα διανύσματα $\{f_P(w_1), f_P(w_2), \dots, f_P(w_k)\}$ αποτελούν βάση του W' , άρα $\dim W' = k = \dim W$. \square

3.5.3 Πρόταση: Αν P_1 είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας $m \times m$ και P_2 ένας αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$, τότε

$$\text{rank}(P_1 A) = \text{rank}(A P_2) = \text{rank}(A),$$

για κάθε πίνακα A $m \times n$.

Αποδ.: Ο πίνακας A γράφεται: $A = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, όπου c_1, c_2, \dots, c_n οι στήλες του πίνακα A . Έχουμε $P_1 A = (P_1 c_1, P_1 c_2, \dots, P_1 c_n)$, όπου $P_1 c_1, P_1 c_2, \dots, P_1 c_n$ οι στήλες του πίνακα $P_1 A$. Από το λήμμα 3.5.2 επειδή ο πίνακας P_1 είναι αντιστρέψιμος τα διανύσματα $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ και τα διανύσματα $\{P_1 c_1, P_1 c_2, \dots, P_1 c_n\}$ παράγουν υπόχωρους ίδιας διάστασης. Άρα $\text{rank}(A) = \text{rank}(P_1 A)$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\text{rank}(A) = \text{rank}(AP_2)$. \square

Πόρισμα 3.5.4: Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες, τότε $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

Αποδ.: Επειδή οι A, B είναι όμοιοι πίνακες, υπάρχει P αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Δηλαδή έχουμε $AP = PB$ και κατά συνέπεια $\text{rank}(AP) = \text{rank}(PB)$. Όμως από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\text{rank}(A) = \text{rank}(AP)$ και $\text{rank}(PB) = \text{rank}(B)$. Άρα $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. \square

Ορισμός 3.5.5: Έστω $f : V \rightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Ονομάζουμε **τάξη** ή βαθμό της f την τάξη του πίνακα της f ως προς δύο βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}' των V, W αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Αν επιλέξουμε δύο διαφορετικές βάσεις \mathcal{B}_1 και \mathcal{B}'_1 των V, W αντίστοιχα, τότε από την παρατήρηση 3.3.4 υπάρχουν P_1, P_2 αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = P_2(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')P_1^{-1}. \quad (1)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \text{rank}((f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')) &= \text{rank}(P_2(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')) \quad \text{από πρόταση 3.5.2.} \\ &= \text{rank}(P_2(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')P^{-1}) \quad \text{από πρόταση 3.5.2.} \\ &= \text{rank}((f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)). \quad \text{από (1)} \end{aligned}$$

Άρα η τάξη μιας γραμμικής απεικόνισης δεν εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων.

3.6 Ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} με $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ και $\dim_{\mathbb{k}} W = m$.

Ορισμός 3.6.1: Μια απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ θα λέγεται **ισομορφισμός** διανυσματικών χώρων αν:

- (i) η f είναι γραμμική,
- (ii) η f είναι «1-1» και
- (iii) η f είναι «επί».

Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός από έναν διανυσματικό χώρο V σ' ένα διανυσματικό χώρο W θα λέμε ότι οι διανυσματικοί χώροι V, W είναι **ισόμορφοι** και θα συμβολίζουμε $V \cong W$.

Αν $V = W$ και $f : V \rightarrow V$ ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω ιδιότητες τότε θα λέμε ότι η f είναι ένας **αυτομορφισμός** του διανυσματικού χώρου V .

Πρόταση 3.6.2: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} , με $\dim V = n$. Τότε ο V είναι ισόμορφος με τον \mathbb{k}^n .

Αποδ.: Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ του \mathbb{k}^n . Ορίζουμε $f : V \rightarrow \mathbb{k}^n$ την γραμμική απεικόνιση με $f(v_i) = e_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Θα δείξουμε ότι η f είναι «1-1» και «επί». Πρώτα το «1-1»: Έστω $v, v' \in V$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ και $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ και $v' = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \dots + \lambda'_n v_n$. Αν $f(v) = f(v')$, τότε $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = f(\lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \dots + \lambda'_n v_n)$ και κατά συνέπεια $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda'_1 f(v_1) + \lambda'_2 f(v_2) + \dots + \lambda'_n f(v_n)$. Άρα

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n &= \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \dots + \lambda'_n e_n \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda'_1) e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) e_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) e_n &= 0. \end{aligned}$$

Επειδή τώρα τα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, ..., $\lambda_n = \lambda'_n$. \square

Πρόταση 3.6.3: Έστω $f : V \rightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του V . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η f είναι αυτομορφισμός.
- (ii) Η f είναι «1-1».
- (iii) $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.
- (iv) Η f είναι αντιστρέψιμη.
- (v) Αν $[f]$ είναι ο πίνακας της f , τότε $\det[f] \neq 0$.

Αποδ.: (i) \Rightarrow (ii) Προφανές από τον ορισμό.

(ii) \Rightarrow (iii) Υποθέτουμε ότι η f είναι «1-1». Έστω $v \in \ker f$. Τότε $f(v) = \mathbf{0}$.

Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση έπεται ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Άρα $f(v) = f(\mathbf{0})$ και κατά συνέπεια $v = \mathbf{0}$ επειδή η f είναι «1-1». Άρα $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) \Rightarrow (i) Έστω v_1, v_2, \dots, v_n μια βάση του V . Θα δείξουμε ότι τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \mathbf{0},$$

τότε επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση έχουμε

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0}$$

και κατά συνέπεια επειδή $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, δηλαδή τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επειδή τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ είναι n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\text{Im } f$ από το πόρισμα 2.7.9.(i) $\dim \text{Im } f \geq n$. Όμως $\dim V = n$, άρα από το πόρισμα 2.7.10 συμπεραίνουμε ότι $\text{Im } f = V$, δηλαδή η f είναι «επί». Άρα η f είναι αυτομορφισμός.

(i) \Rightarrow (iv) Έχουμε ότι η f είναι «1-1» και «επί». Άρα υπάρχει η $f^{-1} : V \rightarrow V$, δηλαδή η f είναι αντιστρέψιμη.

(iv) \implies (ii) Έστω ότι $f(v) = f(v')$. Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη, έπεται ότι υπάρχει η f^{-1} . Συνεπώς, $(f^{-1} \circ f)(v) = (f^{-1} \circ f)(v')$. Άρα, $v = v'$, δηλαδή η f είναι «1-1».

(iv) \iff (v) Από το πόρισμα 3.2.2 έχουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν ο πίνακας της f ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι αντιστρέψιμος. Όμως γνωρίζουμε από το κεφάλαιο των οριζουσών ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός. \square

Παραδείγματα: (i) Έστω $V = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ το επίπεδο Oxz και $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ το επίπεδο Oxy . Έχουμε

$$V \cong W.$$

Πράγματι έστω $f : V \rightarrow W$ τέτοιος ώστε $f(x, 0, y) = (x, y, 0)$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

(ii) Έχουμε

$$\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R}).$$

Πράγματι θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Η f είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Έστω τώρα V, W διανυσματικοί χώροι με $\dim_k V = n$ και $\dim_k W = m$.

Πρόταση 3.6.4: Ο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Αποδ.: Στον $\mathcal{L}(V, W)$ ορίζουμε την πράξη της πρόσθεσης:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}(V, W), v \in V.$$

Επίσης ορίζουμε την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) \quad \lambda \in \mathbb{k}, v \in V.$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη η επαλήθευση των ιδιοτήτων του διανυσματικού χώρου. \square

Θεώρημα 3.6.5: Έχουμε

$$\mathcal{L}(V, W) \cong M_{m \times n}(\mathbb{k}).$$

Επιπλέον $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ βάσεις των V, W αντίστοιχα. Ορίζουμε μια απεικόνιση:

$$\varphi : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{k})$$

έτσι ώστε $\varphi(f) = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, όπου $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ είναι ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}' του V και W αντίστοιχα.

Πρώτα δείχνουμε ότι η φ είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, έστω $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{k}$. Τότε έχουμε:

$$\varphi(\lambda f + g) = ((\lambda f + g); \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') + (g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).$$

Τώρα δείχνουμε ότι η φ είναι «επί». Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$. Αν $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ τότε ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση $f_A \in \mathcal{L}(V, W)$ έτσι ώστε:

$$f_A(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} w_i \quad \text{για κάθε } j = 1, 2, \dots, n.$$

Είναι προφανές από τον ορισμό του πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης ότι

$$\varphi(f_A) = (f_A; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A.$$

Άρα η φ είναι «επί».

Επίσης δείχνουμε ότι η φ είναι «1-1». Πράγματι, υποθέτουμε $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ τέτοιοι ώστε $\varphi(f) = \varphi(g)$. Τότε αν $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\alpha_{ij})$ και $(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\beta_{ij})$, έχουμε

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \text{για κάθε } i, j.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} w_i = g(v_j)$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. Όμως επειδή οι f, g είναι γραμμικές απεικονίσεις και τα v_1, v_2, \dots, v_n αποτελούν βάση του V , συμπεραίνουμε ότι $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in V$. Άρα $f = g$.

Τέλος επειδή $\dim_{\mathbb{k}} M_{m \times n}(\mathbb{k}) = mn$, τότε θα έχουμε και $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{L}(V, W) = mn$. \square

3.7 Δυϊκός χώρος

Έστω V διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{k} . Το σώμα \mathbb{k} μπορεί το ίδιο να θεωρηθεί διανυσματικός χώρος (διάστασης 1) υπεράνω του \mathbb{k} .

Ορισμός 3.7.1: Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{k})$ των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ λέγεται **δυϊκός χώρος** του V και συμβολίζεται με V^* . Οι γραμμικές απεικονίσεις $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ λέγονται **γραμμικές μορφές** του χώρου V επί του \mathbb{k} .

Παρατήρηση 3.7.2: Αν η διάσταση του διανυσματικού χώρου V είναι n τότε από το θεώρημα 3.5.4, ο διανυσματικός χώρος V^* έχει διάσταση $n \cdot 1 = n$.

Παράδειγμα 3.7.3: Υπολογίστε το δυϊκό χώρο του \mathbb{R}^n .

Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Κάθε γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Έστω

$$f(e_1) = a_1, \quad f(e_2) = a_2, \quad \dots, \quad f(e_n) = a_n.$$

Αν $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, συνεπώς

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i. \quad (1)$$

Άρα κάθε στοιχείο $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζει μια γραμμική μορφή του \mathbb{R}^n σύμφωνα με τον τύπο (1), την οποία συμβολίζουμε με f_a . Άρα

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Π.χ. ο δυϊκός χώρος του \mathbb{R}^2 είναι οι απεικονίσεις με τύπο $f(x, y) = ax + by$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και ο δυϊκός χώρος του \mathbb{R}^3 είναι οι απεικονίσεις με τύπο $f(x, y, z) = ax + by + cz$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.7.4: Έστω $M_n(\mathbb{k})$ ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{k} . Για κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζουμε το **ίχνος** του, $\text{tr } A$ (trace) ως εξής:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Η απεικόνιση $A \mapsto \text{tr } A$ είναι μια γραμμική μορφή του χώρου $M_n(\mathbb{k})$, διότι αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, έχουμε

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}((a_{ij} + b_{ij})) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr } A + \text{tr } B$$

και

$$\text{tr}(\lambda A) = \text{tr}((\lambda a_{ij})) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr } A.$$

Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Ορίζουμε τις γραμμικές μορφές $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*$ από τις τιμές τους στα στοιχεία της βάσης \mathcal{B} ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^*(v_1) = 1, & v_1^*(v_2) = 0 & \dots, & v_1^*(v_n) = 0 \\ v_2^*(v_1) = 0, & v_2^*(v_2) = 1 & \dots, & v_2^*(v_n) = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n^*(v_1) = 0, & v_n^*(v_2) = 0 & \dots, & v_n^*(v_n) = 1 \end{array}$$

Οι γραμμικές μορφές v_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες διότι αν $\lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \dots + \lambda_n v_n^* = \mathbf{0}$, τότε για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_j) &= \lambda_1 v_1^*(v_j) + \lambda_2 v_2^*(v_j) + \dots + \lambda_n v_n^*(v_j) \\ &= \lambda_j v_j^*(v_j) \\ &= \lambda_j \\ &= \mathbf{0}(v_j) = 0. \end{aligned}$$

Επειδή $\dim V^* = n$, το σύνολο $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ είναι μια βάση του V^* την οποία ονομάζουμε **δual** βάση της βάσης \mathcal{B} .