

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ

1. Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα $\mathbb{k}$. Αν v_1, v_2, v_3 είναι τρία διανύσματα του V , δείξτε ότι τα διανύσματα $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ και $w_3 = v_3 - v_1$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ανεξάρτητα.

(i) $\{(1, 1), (2, 3)\}$ στο $\mathbb{R}^2$.

(ii) $\{(1, -1, 0), (-3, 2, 1), (-1, 0, 1)\}$ στο $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\{3 - x + 9x^2, 5 - 6x + 3x^2, 1 + x - 5x^2\}$ στο $\mathbb{k}[x]$.

3. Έστω $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V . Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\}$$

είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $\mathcal{B}_1 = \{1, x+1, x^2+1, x^3+1, x^4+1\}$ αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{k}[x]_4$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 4 πάνω στο $\mathbb{k}$. Γράψτε το πολυωνύμο $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}_1$.

5. Έστω $\mathcal{D}_3$ το σύνολο των 3×3 διαγωνίων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς.

(i) Ναδειχθεί ότι το $\mathcal{D}_3$ είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$.

(ii) Ναδειχθεί ότι το σύνολο:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί βάση του $\mathcal{D}_3$.

6. Ποια από τα ακόλουθα σύνολα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$;

a) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$, b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$, c) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$.

7. Θεωρούμε τις ακόλουθες δύο βάσεις του $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (0, 2, -1)\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $v = (3, 5, -2)$ ως προς τις παραπάνω βάσεις.

8. Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\} \quad \text{και}$$

$$U_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 \text{ και } -2x + y + w = 0\}.$$

Βρείτε μια βάση του U_1 και μία του U_2 . Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $U_1 \cap U_2$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $U_1 + U_2$.

9. Δείξτε ότι αν τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα v_1, v_4, v_5 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

10. Έστω $v_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$, τότε

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_2, \dots, v_n \rangle.$$

11. Έστω V το σύνολο των 2×2 συμμετρικών πινάκων. Δηλαδή

$$V = \{A \in M_2(k) \mid A^t = -A\}.$$

Δείξτε ότι ο V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(k)$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του V .

12. Έστω v_1, v_2, w_1, w_2 τέσσερα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V . Δείξτε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle w_1, w_2 \rangle = \{0\}$.

13. Έστω U, W δύο δισδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι $U \cap W \neq \{0\}$.

14. Έστω U, W δύο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V με $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ και $\dim V = 7$. Βρείτε τις πιθανές διαστάσεις του $U \cap W$.

15. Έστω U, W οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ που παράγονται από τα διανύσματα $\{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ και $\{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση των $U, W, U \cap W, U + W$.

16. (Θεωρία) Έστω (Σ) ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Δηλαδή, αν $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας συντελεστών του (Σ) , και $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι μια λύση του (Σ) , έχουμε $AX = \mathbf{0}$. Δείξτε ότι το σύνολο λύσεων του (Σ) είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

17. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του χώρου λύσεων του ακόλουθου ομογενούς συστήματος:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0 \end{cases}$$