

# I. ΠΙΝΑΚΕΣ

## 1.1 Σώμα

**1.1.1 Ορισμός:** Ένα σύνολο  $\mathbb{k}$  εφοδιασμένο με δύο πράξεις  $+$  και  $\cdot$  ονομάζεται **σώμα** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

(A) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μηδενικό στοιχείο): Υπάρχει  $\mathbf{0} \in \mathbb{k}$  τέτοιο ώστε

$$\mathbf{0} + a = a + \mathbf{0} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Υπαρξη αντίθετου στοιχείου): Για κάθε  $a \in \mathbb{k}$  υπάρχει  $-a \in \mathbb{k}$  τέτοιο ώστε

$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0},$$

(δ) (Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{k}.$$

(B) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μοναδιαίο στοιχείο): Υπάρχει  $\mathbf{1} \in \mathbb{k}$  τέτοιο ώστε

$$\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Υπαρξη αντίστροφου στοιχείου): Για κάθε  $a \in \mathbb{k} \setminus \{\mathbf{0}\}$  υπάρχει  $a^{-1} \in \mathbb{k}$  τέτοιο ώστε

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathbf{1},$$

(δ) (Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{k}.$$

(Γ) (Επιμεριστική ιδιότητα)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}.$$

**Παραδείγματα:** 1) Στο  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το  $\mathbb{R}$  είναι σώμα.

- 2) Στο  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το  $\mathbb{C}$  είναι σώμα.
- 3) Στο  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το  $\mathbb{Q}$  είναι σώμα.
- 4) Το  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  δε είναι σώμα διότι το 2 δεν έχει αντίστροφο.
- 5) Έστω  $\mathbb{k} = \{0, 1\}$ . Ορίζουμε τις πράξεις:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0$$

και

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1.$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1, άρα το  $\mathbb{k} = \{0, 1\}$  είναι σώμα (συμβολίζεται με  $\mathbb{Z}_2$ ).

Από τα παραπάνω σώματα, τα  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  είναι άπειρα σώματα, ενώ το  $\mathbb{Z}_2$  είναι πεπερασμένο σώμα.

## 1.2 Πίνακες

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με  $\mathbb{k}$  το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των πραγματικών ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$  ή  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ .

**Ορισμός 1.2.1:** Μία διάταξη στοιχείων ενός σώματος  $\mathbb{k}$  σε μορφή ορθογωνίου σχήματος αποτελούμενη από  $m$ -γραμμές και  $n$ -στήλες, λέγεται **πίνακας**  $m \times n$ . Δηλαδή, έστω  $A$  ένας πίνακας  $m \times n$ , τότε θα γράφουμε:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Επίσης θα γράφουμε

$$A = (a_{ij}),$$

εννοώντας τον πίνακα που έχει στη θέση  $(i, j)$  το στοιχείο  $a_{ij}$  για  $1 \leq i \leq m$  και  $1 \leq j \leq n$ . Το σύνολο των πινάκων  $m \times n$  με στοιχεία στο σώμα  $\mathbb{k}$  θα συμβολίζεται με  $M_{m \times n}(\mathbb{k})$ . Τους πίνακες θα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα της Ελληνικής ή της Λατινικής αλφαβήτου.

Όταν  $m = n$  (δηλαδή αν ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των στηλών), τότε ο πίνακας θα λέγεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων  $n \times n$  με στοιχεία στο σώμα  $\mathbb{k}$  θα συμβολίζεται με  $M_n(\mathbb{k})$ .

Δύο πίνακες  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  και  $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  είναι **ίσοι** αν και μόνον αν  $a_{ij} = b_{ij}$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Παραδείγματα:** α) Ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & \frac{8}{3} & -7 \end{pmatrix}$  είναι ένας πίνακας  $2 \times 3$  με στοιχεία που ανήκουν στο  $\mathbb{Q}$  ή στο  $\mathbb{R}$  ή στο  $\mathbb{C}$ .

β) Ο πίνακας  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$  είναι ένας πίνακας  $2 \times 2$  με στοιχεία που ανήκουν στο  $\mathbb{R}$  ή στο  $\mathbb{C}$ .

γ) Ο πίνακας  $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  είναι ένας πίνακας  $2 \times 2$  με στοιχεία που ανήκουν στο  $\mathbb{C}$ .

### 1.3 Πράξεις Πινάκων

#### 1.3.1 Πρόσθεση Πινάκων

Για να προσθέσουμε δύο πίνακες θα πρέπει αυτοί να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών αντίστοιχα. Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$  και  $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$ . Ορίζουμε το άθροισμα των δύο πινάκων  $C = A + B$ , ως τον πίνακα  $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}$  με  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Δηλαδή η πρόσθεση δύο πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

γίνεται ως εξής:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

**Παράδειγμα:** Έστω  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{pmatrix}$ .

Τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 3-6 & -1+1 \\ 8+\sqrt{2} & -2-3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 8+\sqrt{2} & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

#### 1.3.2 Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Ορίζουμε τον πίνακα  $\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού  $\lambda \in \mathbb{K}$  με έναν πίνακα:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in$

$M_{m \times n}(\mathbb{K})$  ορίζεται ως εξής:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}).$$

**Παράδειγμα:** Έστω  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Τότε

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Ορίζουμε τον πίνακα  $-A := (-1) \cdot A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Κατά συνέπεια μπορούμε να ορίσουμε την **αφαίρεση** πινάκων:

$$A - B := A + (-1)B.$$

### 1.3.3. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  ένας πίνακας  $m \times n$  και  $B \in M_{s \times t}(\mathbb{K})$  ένας πίνακας  $s \times t$ . Για να πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός  $A \cdot B$  απαιτείται  $n = s$ , δηλαδή ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα θα πρέπει να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  και  $B = (b_{ij}) \in M_{n \times t}(\mathbb{K})$ . Ορίζουμε ως το γινόμενο  $C = A \cdot B$  τον πίνακα  $C = (c_{ij}) \in M_{m \times t}(\mathbb{K})$  με

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \quad (1).$$

**Παραδείγματα:** 1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 7 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -27 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός. Δηλαδή, εν γένει,  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

## 1.4 Ιδιότητες Πινάκων

**1.4.1 Ορισμός:** Ονομάζουμε **Μοναδιαίο** ή **Ταυτοτικό** πίνακα τον τετραγωνικό πίνακα  $n \times n$  του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1 και όλα τα άλλα στοιχεία είναι μηδέν. Δηλαδή

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος γράφεται

$$I_n = (\delta_{ij}),$$

$$\text{με } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ 1, & \text{για } i = j \end{cases}.$$

**1.4.2 Ορισμός:** Ονομάζουμε **Μηδενικό** τον  $m \times n$  πίνακα που όλα του τα στοιχεία είναι μηδέν, δηλαδή

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.4.3 Πρόταση:** Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{s \times t}(\mathbb{K})$  και  $C = (c_{ij}) \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$ .

(i) Αν  $m = s$  και  $n = t$ , δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$ , τότε

$$A + B = B + A \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης}).$$

(ii) Αν  $m = s = p$  και  $n = t = q$ , δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση των πινάκων  $A, B, C$ , τότε

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης}).$$

(iii)  $A + \mathbb{O} = A$ , για κάθε πίνακα  $A$ .

(iv)  $A + (-A) = \mathbb{O}$ , για κάθε πίνακα  $A$ .

(v)  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ , για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A$ .

(vi) Έστω  $n = s$  και  $t = p$ . Τότε

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα του πολ/σμού}).$$

(vii) (a) Έστω  $n = s = p$  και  $t = p$ , τότε

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα από τα αριστερά}).$$

(b) Έστω  $s = p$  και  $t = q = m$ , τότε

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα από τα δεξιά}).$$

**Αποδ:** (i) Θεωρούμε  $A = (a_{ij})$  και  $B = (b_{ij})$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) \\ &= B + A \end{aligned}$$

(ii) Θεωρούμε  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  και  $C = (c_{ij})$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα στο } \mathbb{k}) \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

(iii) Προφανές

(iv) Προφανές

(v) Έστω  $A = (a_{ij})$  και  $I_n = (\delta_{ij})$ . Αν  $A \cdot I_n = (c_{ij})$ , τότε από τον τύπο 1.3.3(1) έχουμε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

Άρα  $A \cdot I_n = A$ . Όμοια δείχνουμε ότι  $I_n \cdot A = A$ .

(vi) Θεωρούμε  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  και  $C = (c_{ij})$ . Έχουμε

$$A \cdot B = (d_{ij}), \quad \text{με } d_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j} \quad (1).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left( \sum_{k=1}^t d_{ik} c_{kj} \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \left( \sum_{k=1}^t \left( \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj} \right) \\ &= \left( \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \left( \sum_{k=1}^t b_{\ell k} c_{kj} \right) \right) \quad (2). \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε,

$$B \cdot C = (e_{ij}), \quad \text{με } e_{ij} = \sum_{k=1}^t b_{ik} c_{kj} \quad (3).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \left( \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} e_{\ell j} \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \left( \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \left( \sum_{k=1}^t b_{\ell k} c_{kj} \right) \right) \quad (4). \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .  
(vii) (a) Θεωρούμε  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  και  $C = (c_{ij})$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right) \\ &= \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) + \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right) \right] \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) + \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right) \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

(b) Όμοια με το (a) αποδεικνύουμε ότι  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ .  $\square$

### 1.5 Δύναμη Πίνακα

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ένας τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$ . Ισχύει,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ \dots &\quad \dots \\ A^n &= \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n\text{-φορές}}. \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$A^0 := I_n.$$

Υπολογίζοντας το τετράγωνο του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων  $A, B$  βρίσκουμε:

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2. \quad (1)$$

Αν οι πίνακες  $A, B$  μετατίθενται μεταξύ τους τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2.$$

Πιο γενικά η  $n$ -οστή δύναμη του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων  $A, B$  που μετατίθενται μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

**1.5.1 Πρόταση:** Αν οι πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  μετατίθενται μεταξύ τους τότε:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} \cdot B + \binom{n}{2} A^{n-2} \cdot B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} A \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n} B^n,$$

όπου  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , με  $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$  και  $0! := 1$ .

**Αποδ.:** Η απόδειξη είναι έξω από τους σκοπούς του μαθήματος.  $\square$

**Παράδειγμα:** Να βρεθεί η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A$  γράφεται:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B,$$

όπου  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Παρατηρούμε ότι οι πίνακες  $B$  και  $I_3$  μετατίθενται

μεταξύ τους, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$(I_3 + B)^n = \binom{n}{0} I_3^n + \binom{n}{1} I_3^{n-1} \cdot B + \cdots + \binom{n}{n-1} I_3 \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n} B^n. \quad (1)$$

Επειδή ο  $I_3$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας, έχουμε  $I_3^n = I_3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από την άλλη μεριά υπολογίζουμε τις δυνάμεις του  $B$ :

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο μηδενικός πίνακας  $3 \times 3$ . Κατά συνέπεια  $B^k = \mathbb{O}$  για κάθε  $k \geq 3$ .

Συνεπώς, από τον τύπο (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
A^n &= (I_3 + B)^n \\
&= I_3^n + \binom{n}{1} I_3^{n-1} \cdot B + \binom{n}{2} I_3^{n-2} \cdot B^2 + \binom{n}{3} I_3^{n-3} \cdot \overbrace{B^3}^{=0} + \dots + \binom{n}{n} \overbrace{B^n}^{=0} \\
&= I_3 + n I_3 \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} I_3 \cdot B^2 \\
&= I_3 + n B + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## 1.6 Διαγώνιος Πίνακας

**Ορισμός:** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$  ονομάζεται **διαγώνιος** αν όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι 0, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Θα το συμβολίζουμε με  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

**Παράδειγμα:** Έχουμε  $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$

## 1.7 Κλιμακωτός Πίνακας

**1.7.1 Ορισμός:** Ένας  $m \times n$  πίνακας, ονομάζεται **κλιμακωτός**, αν και μόνον αν,

(i) το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (από τα αριστερά), κάθε μη μηδενικής γραμμής, είναι 1. Αυτό το στοιχείο ονομάζεται **ηγετικό**.

(ii) Το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή, βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της κάθε προηγούμενης.

(iii) Οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν (πάνω) από τις μηδενικές γραμμές.

**Παραδείγματα:**

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  κλιμακωτός
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  μη κλιμακωτός
- c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  κλιμακωτός
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  μη κλιμακωτός
- e)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  μη κλιμακωτός.

**1.7.2 Ορισμός:** Ένας κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος** κλιμακωτός, αν και μόνον αν, το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται το 1.

**Παράδειγμα:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ανηγμένος κλιμακωτός.}$$

## 1.8 Αντίστροφος Πίνακας

**1.8.1 Ορισμός:** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{k})$  ένας τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας. Θα λέμε ότι ο  $A$  είναι **αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει ένας πίνακας  $B$   $n \times n$ , τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (*)$$

Ο  $B$  λέγεται **αντίστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^{-1}$ .

**1.8.2 Πρόταση:** Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι μοναδικός.

**Αποδ.:** Έστω  $B, C$  δύο αντίστροφοι του πίνακα  $A$ . Τότε από τον ορισμό και την εξίσωση  $(*)$  έχουμε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad (1)$$

$$B \cdot C = C \cdot B = I_n \quad (2).$$

Κατά συνέπεια έχουμε,

$$C = C \cdot I_n \stackrel{(1)}{=} C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B \stackrel{(2)}{=} I_n \cdot B = B. \square$$

**1.8.3 Πρόταση:** Αν  $A, B$  είναι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε και ο  $A \cdot B$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

**Αποδ.:** Επειδή οι  $A, B$  είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, από τον ορισμό και την εξίσωση  $(*)$  έχουμε:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad (1)$$

$$B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_n \quad (2).$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} A \cdot I_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &\stackrel{(1)}{=} I_n \end{aligned}$$

και από την άλλη μεριά

$$\begin{aligned} (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &\stackrel{(1)}{=} B^{-1} \cdot I_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &\stackrel{(2)}{=} I_n. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό, ο  $A \cdot B$  είναι αντιστρέψιμος και  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \square$

## 1.9 Ανάστροφος Πίνακας

**1.9.1 Ορισμός:** Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  ένας  $m \times n$  πίνακας (όχι απαραίτητα τετραγωνικός). Ονομάζουμε **ανάστροφο** πίνακα του  $A$ , τον πίνακα  $n \times m$ , ο οποίος έχει γραμμές τις στήλες του  $A$  και στήλες τις γραμμές του  $A$ . Συμβολίζουμε με  $A^t$  τον ανάστροφο του πίνακα  $A$ .

**Παράδειγμα:**

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**1.9.2 Πρόταση:** Έστω  $A, B$  δύο τετραγωνικοί πίνακες  $n \times n$ . Τότε,

$$(i) (A + B)^t = A^t + B^t.$$

$$(ii) (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

$$(iii) (A^t)^t = A.$$

$$(iv) I^t = I.$$

$$(v) (\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

**Αποδ.:** Έστω  $A = (a_{ij})$  και  $B = (b_{ij})$ . Τότε  $A^t = (a'_{ij})$  με  $a'_{ij} = a_{ji}$  και  $B^t = (b'_{ij})$  με  $b'_{ij} = b_{ji}$ .

$$(i) (A+B)^t = ((a_{ij}+b_{ij})') = (a_{ji}+b_{ji}) = (a'_{ij}+b'_{ij}) = (a'_{ij})+(b'_{ij}) = A^t+B^t.$$

$$(ii) \text{ Έστω } A \cdot B = (c_{ij}) \text{ με } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \text{ Τότε,}$$

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^t &= (c'_{ij}) = (c_{ji}) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n b'_{ik}a'_{kj} \right) \\ &= B^t \cdot A^t. \end{aligned}$$

$$(iii) (A^t)^t = ((a'_{ij})') = ((a_{ji})') = (a_{ij}) = A.$$

$$(iv) I_n^t = (\delta'_{ij}) = (\delta_{ji}) = (\delta_{ij}) = I_n.$$

$$(v) (\lambda A)^t = ((\lambda a_{ij})') = ((\lambda a_{ji})') = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a'_{ij}) = \lambda A^t. \square$$

**1.9.3 Πρόταση:** Έστω  $A$  τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$ . Τότε, ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο  $A^t$  είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Αποδ.:** ( $\implies$ ) Έστω  $A$  αντιστρέψιμος. Από τον ορισμό προκύπτει ότι υπάρχει  $A^{-1}$  τέτοιος ώστε  $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$ . Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέλη της ισότητας:

$$(A \cdot A^{-1})^t = I_n^t \iff (A^{-1})^t \cdot A^t = I_n. \quad (1)$$

Όμοια από την εξίσωση  $A^{-1} \cdot A = I_n$  παίρνουμε την εξίσωση  $A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$  (2). Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο αντίστροφος πίνακας του  $A^t$  είναι ο  $(A^{-1})^t$ , δηλαδή ο  $A^t$  είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον έχουμε  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

( $\impliedby$ ) Έστω  $A^t$  αντιστρέψιμος τότε από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι ο  $(A^t)^t$  είναι αντιστρέψιμος δηλαδή ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος.  $\square$

## 1.10 Συμμετρικοί, Αντισυμμετρικοί και Ορθογώνιοι Πίνακες

**1.10.1 Ορισμοί:** (i) Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  ονομάζεται **συμμετρικός** αν και μόνον αν  $A^t = A$ .

(ii) Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  ονομάζεται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν  $A^t = -A$ .

(iii) Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  ονομάζεται **ορθογώνιος** αν και μόνον αν  $A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n$ .

**Παραδείγματα:**

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ συμμετρικός}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ αντισυμμετρικός}$$

$$(iii) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ορθογώνιος.}$$