Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώσεις για το Μάθημα
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Διδάσκων: Παπαλεξίου Νικόλαος

ΟΚΤΩΒΡΗΣ 2016

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Έστω $M_n(\mathbb{k})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων που ορίζονται πάνω σ' ένα σώμα $\mathbb{k}$. Για $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, $M_n(\mathbb{Q})$ είναι το σύνολο των ρητών $n \times n$ πινάκων, για $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των πραγματικών $n \times n$ πινάκων και για $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$ είναι το σύνολο των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων.

Ορίζουσες $n \times n$.

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{k})$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (r_1, \ldots, r_n),$$

όπου $r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in})$ είναι οι γραμμές του A για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\det : M_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ λέγεται **ορίζουσα συνάρτηση** αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1) (n-γραμμική): (α) Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε

$$\det(r_1, \ldots, r_i + r_i', \ldots, r_n) = \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n) + \det(r_1, \ldots, r_i', \ldots r_n).$$

(β) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{k}$ και για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$\det(r_1, \ldots, \lambda r_i, \ldots, r_n) = \lambda \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n).$$

2) (Εναλλάσσουσα) Αν δύο διαδοχικές γραμμές ενός πίνακα A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$. Δηλαδή αν $r_k = r_{k+1}$ για κάποιο k, τότε

$$\det(r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n) = 0.$$

3) $\det(I_n) = 1$.

Θα ονομάζουμε το $\det A$ **ορίζουσα** του A. Επίσης θα συμβολίζουμε την ορίζουσα ενός πίνακα, με τον ίδιο τον πίνακα αντικαθιστώντας τις παρενθέσεις του πίνακα από δύο κάθετες γραμμές.

Παράδειγμα 1: Η συνάρτηση $\det : M_2(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ που ορίζεται από τον τύπο $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12}+\alpha'_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22}+\alpha'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

δηλαδή η συνάρτηση είναι γραμμική στις δύο γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Παράδειγμα 2: Η συνάρτηση $\det : M_3(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ που ορίζεται από τον τύπο ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12}+\alpha'_{12} & \alpha_{13}+\alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12}+\alpha'_{12} & \alpha_{13}+\alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_{11}+\alpha'_{11})\alpha_{22}\alpha_{33} + (\alpha_{12}+\alpha'_{12})\alpha_{23}\alpha_{31} + (\alpha_{13}+\alpha'_{13})\alpha_{21}\alpha_{32} \\
&-(\alpha_{11}+\alpha'_{11})\alpha_{23}\alpha_{32} - (\alpha_{12}+\alpha'_{12})\alpha_{21}\alpha_{33} - (\alpha_{13}+\alpha'_{13})\alpha_{22}\alpha_{31} \\
&= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
&+\alpha'_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha'_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha'_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha'_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha'_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha'_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
= &\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Όμοια αποδεικνύουμε την παραπάνω ιδιότητα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή. Επίσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\
= \ &\lambda\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \lambda\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \lambda\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \lambda\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \lambda\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \lambda\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
= \ &\lambda\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

και το ίδιο μπορούμε να αποδείξουμε για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή. Συνεπώς η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις τρεις γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33}+a_{12}a_{13}a_{31}+a_{13}a_{11}a_{32}-a_{13}a_{12}a_{31}-a_{11}a_{13}a_{32}-a_{12}a_{11}a_{33} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{21}+a_{13}a_{21}a_{22}-a_{13}a_{22}a_{21}-a_{11}a_{23}a_{22}-a_{12}a_{21}a_{23} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{11}+a_{13}a_{21}a_{12}-a_{13}a_{22}a_{11}-a_{11}a_{23}a_{12}-a_{12}a_{21}a_{13} = 0.
$$

Τέλος έχουμε
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Ιδιότητες οριζουσών

Πρόταση 1: Αν αλλάξουμε τη σειρά δύο διαδοχικών γραμμών τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή για $i = 1, 2, \ldots, n-1$ αν $A = (r_1, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_n)$ και $B = \det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_i, \ldots, r_n)$, τότε
$$\det(B) = -\det(A).$$

Αποδ: Από την ιδιότητα $1(a)$ του ορισμού της ορίζουσας, έχουμε:
$$\begin{aligned} 0 &= \det(r_1, \ldots, r_i + r_{i+1}, r_i + r_{i+1}, \ldots, r_n) \\ &= \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_i, r_i, \ldots, r_n)}^{=0} + \det(r_1, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_n) \\ &+ \det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_i, \ldots, r_n) + \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_{i+1}, \ldots, r_n)}^{=0} \\ &= 0 + \det(A) + \det(B) + 0. \end{aligned}$$
Άρα $\det(B) = -\det(A)$.□

Πρόταση 2: Αν δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε
$$\det A = 0.$$

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι $A = (r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n)$ με $r_i = r_j$. Αλλάζουμε την i-γραμμή με τις επόμενες διπλανές γραμμές έως ότου αυτή η γραμμή πάρει τη θέση της διπλανής γραμμής της j-γραμμής. Από την πρόταση 1 το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει σε κάθε εναλλαγή. Άρα,
$$\begin{aligned} \det A &= \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \\ &= \pm\det(r_1, \ldots, r_i, r_j, \ldots, r_n) \\ &= 0. \qquad \text{(από την ιδιότητα 2 του ορισμού, διότι } r_i = r_j) \end{aligned}$$

Επομένως $\det A = 0.\Box$

Πρόταση 3: Αν $j \neq i$, τότε

$$\det(r_1, \ldots, r_i + \lambda r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) = \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n),$$

δηλαδή αν ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής προστεθεί σε μία άλλη γραμμή τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

Αποδ.: Από την ιδιότητα 1 του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \det(r_1, \ldots, r_i + \lambda r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \\
= \ & \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) + \lambda \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n)}^{=0 \text{ (από πρόταση 2)}} \\
= \ & \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n).\Box
\end{aligned}$$

Ορισμός: Αν $A = (\alpha_{ij})_{n \times n} \in M_n(\Bbbk)$, έστω $A(i|j) \in M_{n-1}(\Bbbk)$ ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν παραλείψουμε την i-γραμμή και j στήλη του A. Ο $A(i|j)$ ονομάζεται **ελάσσονας** πίνακας του στοιχείου α_{ij}.

Θεώρημα 1: Έστω $n > 1$ και $\det : M_{n-1}(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ μια ορίζουσα συνάρτηση. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots n$ οι συναρτήσεις $D_j : M_n(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ τέτοιες ώστε:

$$D_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A(i|j))$$

είναι ορίζουσες συναρτήσεις.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\Bbbk)$ και $A = (r_1, \ldots, r_n)$. Ο ελάσσονας πίνακας $A(i|j)$ γράφεται:

$$A(i|j) = (\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_{i-1}, \overline{r}_{i+1}, \overline{r}_n),$$

όπου $\overline{r}_i$ είναι η i-γραμμή χωρίς το j-στοιχείο. Επομένως:

$$\begin{aligned}
& D_j(r_1, \ldots, r_k + r'_k, \ldots, r_n) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_k + \overline{r}'_k, \ldots, \overline{r}_{i-1}, \overline{r}_{i+1}, \ldots, \overline{r}_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}'_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
&= D_j(r_1,\ldots,r_k,\ldots,r_n)+D_j(r_1,\ldots,r'_k,\ldots,r_n)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&D_j(r_1,\ldots,\lambda r_k,\ldots,r_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\lambda\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
&= \lambda\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
&= \lambda D_j(r_1,\ldots,r_k,\ldots,r_n).
\end{aligned}
$$

Άρα η D_j είναι n-γραμμική.

Δείχνουμε τώρα ότι η D_j είναι εναλλάσσουσα. Έστω $r_k = r_{k+1}$. Θεωρώ $i \neq k$ και $i \neq k+1$. Συνεπώς ο $A(i|j)$ έχει δύο διαδοχικές σειρές ίσες. Επομένως από την ιδιότητα 2 του ορισμού, έχουμε $\det(A(i|j)) = 0$. Άρα

$$D_j(A) = (-1)^{k+j}\alpha_{kj}\det(A(k|j)) + (-1)^{k+1+j}\alpha_{k+1,j}\det(A(k+1|j)).$$

Επειδή όμως $r_k = r_{k+1}$ έπεται ότι $\alpha_{kj} = \alpha_{k+1,j}$ και $A(k|j) = A(k+1|j)$. Άρα $D_j(A) = 0$.

Τέλος έχουμε, $(I_n)(j|j) = I_{n-1}$ και $\det((I_n)(j|j)) = 1$, συνεπώς $D_j(I_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\delta_{ij}\det(I_n(i|j)) = (-1)^{j+j}\det(I_n(j|j)) = 1$. Δηλαδή η $D_j(I_n) = 1$. Άρα για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ οι D_j είναι ορίζουσες συναρτήσεις. $\square$

Παρατήρηση 1: Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις συναρτήσεις:

$$D'_i(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A(i/j)).$$

Δηλαδή αν $\det : M_{n-1}(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσα συνάρτηση, τότε και οι συναρτήσεις $D'_i : M_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσες συναρτήσεις, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ (Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1).

Πόρισμα 1 (Ύπαρξη ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει τουλάχιστον μία ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n. Ήδη είδαμε ότι υπάρχει στο $M_2(\mathbb{k})$ (Παράδειγμα 1). Επίσης το Θεώρημα 1 μας λέει πως μπορούμε να πάρουμε ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$ όταν έχουμε μια τέτοια συνάρτηση στο $M_{n-1}(\mathbb{k})$.$\square$

Θεώρημα 2 (Μοναδικότητα ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει μία και μοναδική ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ και $\det, \det'$ ορίζουσες συναρτήσεις. Θέτω $\Delta(A) = \det(A) - \det'(A)$. Θα δείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$. Έστω $A = (r_1, \ldots, r_n)$, με

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (*),$$

όπου $e_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας γραμμή που έχει 1 στην j-θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Παρατηρούμε ότι :

α) Η Δ είναι n-γραμμική (διότι det, det$'$ είναι n-γραμμικές).

β) Η Δ είναι εναλλάσσουσα (διότι det, det$'$ είναι εναλλάσσουσες).

γ) Αν $(k_1, \ldots, k_n)$ είναι μια μετάθεση των $(1, 2, \ldots, n)$, τότε

$$\Delta(r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots, r_{k_n}) = \pm \Delta(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

(διότι το ίδιο συμβαίνει για τις det, det$'$).

δ) $\Delta(I_n) = \det(I_n) - \det'(I_n) = 1 - 1 = 0$.

Από την εξίσωση $(*)$ αν αντικαταστήσουμε το r_1 έχουμε:

$$\Delta(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \Delta(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} e_j, r_2, \ldots, r_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \Delta(e_j, r_2, \ldots, r_n).$$

Κατόπιν αντικαθιστούμε το r_2 με $\sum_k \alpha_{2k} e_k$. Έτσι $\Delta(e_j, r_2, \ldots, r_n) = \sum_k \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \ldots, r_n)$. Συνεπώς,

$$\Delta(A) = \sum_{j,k} \alpha_{1j} \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \ldots, r_n).$$

Αντικαθιστούμε το r_3 με $\sum_\ell \alpha_{3\ell} e_\ell$, κ.ο.κ. Έτσι τελικά έχουμε:

$$\Delta(A) = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_n \leq n} \alpha_{1,k_1} \alpha_{2,k_2} \ldots \alpha_{n,k_n} \Delta(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}).$$

Όμως, $\Delta(e_{k_1},\dots,e_{k_n}) = \pm\Delta(e_1,\dots,e_n) = 0$ από το (δ). Επομένως $\Delta(A) = 0.\square$

Πόρισμα 1: Για κάθε $j = 1,2,\dots,n$ έχουμε:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A(i \mid j).}$$

και για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ έχουμε:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A(i \mid j).}$$

Σημείωση: Οι παραπάνω τύποι υπολογισμού της ορίζουσας ονομάζονται αντίστοιχα **τύπος αναπτύγματος κατά τη j-στήλη** και **τύπος αναπτύγματος κατά τη i-γραμμή**.

Αποδ.: Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 2 και της παρατήρησης 1.$\square$

Παράδειγμα 2: $\det : M_3(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$, $1 \le j \le 3$. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\Bbbk)$. Έχουμε:

$$\det(A) = D_1(A) = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_2(A) = -\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_3(A) = \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} - \alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + \alpha_{33}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_1'(A) = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_2'(A) = -\alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_3'(A) = \alpha_{31}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + \alpha_{33}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Θεώρημα 3: Αν $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, τότε

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Αποδ.: Η απόδειξη είναι έξω από τις δυνατότητες του μαθήματος.$\square$

Πρόταση 4: Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{k})$, έχουμε

$$\det A^t = \det A.$$

Αποδ.: Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ και $A^t = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A σύμφωνα τον τύπο του αναπτύγματος κατά την i-γραμμή:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad (1).$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A^t σύμφωνα με τον τύπο του αναπτύγματος κατά την j-στήλη:

$$\det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} \det(A^t(i|j)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)).$$

Όμως $A^t(i|j) = (A(j|i))^t$, συνεπώς

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det((A(j|i))^t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A(i|j))^t) \quad (2).
\end{aligned}$$

Η απόδειξη της πρότασης γίνεται με επαγωγή στο n. Για $n = 2$, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Τότε $A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Προφανώς έχουμε:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \det(A^t).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $\det(A(i|j)) = \det((A(i|j))^t)$, άρα από τις εξισώσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\det A^t = \det A.\square$$

Παρατήρηση: Η πρόταση 4 λέει ότι αν αλλάξουμε τις γραμμές από τις στήλες σε έναν πίνακα τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει. Συνεπώς οι ιδιότητες (προτάσεις 1,2,3) ισχύουν και αν αντικαταστήσουμε τη λέξη γραμμές από τη λέξη στήλες.

Πρόταση 5: Αν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ είναι ένας άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας $n \times n$ τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή:

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Αποδ.: Έστω ότι ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Από τον τύπο του αναπτύγματος ως προς την πρώτη στήλη έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3n} \\ 0 & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = ... = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Η απόδειξη για τον κάτω τριγωνικό πίνακα είναι αντίστοιχη.$\square$

Συζυγής (προσαρτημένος) πίνακας-υπολογισμός αντίστροφου πίνακα.

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ ένας πίνακας $n \times n$. Ονομάζουμε **συμπαράγοντα ή αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij} το στοιχείο

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j).$$

Από το πόρισμα 1 ξέρουμε ότι:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}. \quad (1)$$

Ορισμός: Ονομάζουμε **συζυγή** (προσαρτημένο) πίνακα του A (συμβολισμός $adjA$) τον πίνακα $n \times n$:

$$(adjA)_{ij} = c_{ji}.$$

Έχουμε $\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}$. Για $j \neq k$, αντικαθιστούμε την j-στήλη του A από την k-στήλη και ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει B. Τότε ο B έχει δύο ίσες στήλες. Συνεπώς, $\det B = 0$. Επειδή, για $j \neq k$, $B(i|j) = A(i|j)$ και $\beta_{ij} = \alpha_{ik}$, έχουμε:

$$0 = \det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \beta_{ij} \det(B(i|j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ik} \det(A(i|j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij}. \quad (2)$$

Άρα, από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A. \quad (*)$$

Θεώρημα 4: Έστω $A \in M_n(k)$. Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\det A \neq 0$. Επιπλέον έχουμε

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} adjA.$$

Αποδ.: Θέτουμε $adjA = (c'_{ij})$, όπου $c'_{ij} = c_{ji}$. Από την $(*)$ έχουμε,

$$((adjA)A)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} c'_{ji} \alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A.$$

Συνεπώς $(adjA)A = (\det A)I$. Θα δείξουμε ότι $A(adjA) = (\det A)I$. Έχουμε, $(A^t)(i|j) = (A(j|i))^t$. Κατά συνέπεια $(-1)^{i+j}\det(A^t)(i|j) = (-1)^{i+j}\det(A(j|i))^t$. Δηλαδή,

$$adjA^t = (adjA)^t.$$

Συνεπώς, $(adjA^t)A^t = (\det A^t)I = (\det A)I$. Όμως, $(adjA^t)A^t = (A(adjA))^t = A(adjA)$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $A(adjA) = (\det A)I$.

Συνεπώς, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $AA^{-1} = I_n$. Άρα παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη της ισότητας θα έχουμε $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ και από το θεώρημα 3 προκύπτει ότι $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Συνεπώς $\det(A) \neq 0$.

Αντίστροφα, αν $\det(A) \neq 0$ από τους τύπους που αποδείξαμε παραπάνω: $(adjA)A = A(adjA) = (\det A)I$, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA.$$

□