

ΘΕΜΑ 2. i) Για κάθε πραγματικό x υπάρχει φυσικό N με $N > x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν όχι τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \alpha$. Αρα, $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Επομένως
 $K = \sup \mathbb{N}$ υπάρχει. Επαιδί $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq K$ γιὰ
 ότι $n \leq K-1$. Αρα $K-1$ είναι άνω φράγμα του
 $\mathbb{N}$ μικρότερο του K . Άτοπο!

ii) τότε $x, y, x \neq y$ δύο πραγματικοί αριθμοί. Διαφέρουν

Τις εξής περιπτώσεις:

1) $0 < x < y$. έχουμε $y-x > 0$. Επομένως, από την
 αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq \frac{1}{y-x}$ ή
 $\frac{1}{k} \leq y-x$. (1).

Θετουμε $A = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{k} > x\}$. Από την αρχή του
 Αρχιμήδη $A \neq \emptyset$ (υπάρχει n με $n > kx$). Έστω
 $v_0 = \min(A)$. Παρατηρούμε ότι: $\frac{v_0-1}{k} \leq x < \frac{v_0}{k}$ (2)
 Από τις σχέσεις (1) + (2) έχουμε ότι:

$x < \frac{v_0}{k} \leq x + \frac{1}{k} < x + (y-x) = y$. Αρα, $r = \frac{v_0}{k}$ είναι
 ένας ρητός μεταξύ των x και y .

(ii). $x < 0 < y$. Στην περίπτωση 0 είναι ρητός
 μεταξύ των x και y .

(iii) $x < y < 0$. Τότε: $0 < -y < -x$. Αρα, από την (i)
 υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $-y < r < -x$. Επομένως $x < -r < y$ και
 $-r \in \mathbb{Q}$.

Θέμα 2). α) Κάθε αόριστη $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία.
Την τιμή $f(n)$ την συμβολίζουμε με f_n και την ακολουθία
 f ως $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

β) Υποκολουθία μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η συνάρτηση
από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ με μια γνήσια αύξουσα ακολουθία
φυσικών αριθμών $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

γ) Λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συρρίνει στο $l \in \mathbb{R}$
αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - l| < \varepsilon)$.

Θα αποδείξουμε με χρήση της γ) ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την αρχή του Αρχιμήδη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$
τέτοιος ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. n_0 είναι ο δείκτης που φάχνουμε.

Πράγματι, αν $n \geq n_0$ τότε $|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right|$
 $= \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Θέμα 3. i) Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι για $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι:

$$\forall x \in \mathbb{N}, |x - 0| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x| & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Από, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ και f είναι συνεχής στο 0.

Για οποιοδήποτε άλλο $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, επιλέγουμε μία ακολουθία

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ και μία ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^c$

με $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Έχουμε: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ και

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$. Επειδή $x \neq 0$ έχουμε ότι η f δεν

είναι συνεχής.

ii) Έστω $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Τότε αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, έχουμε

οτι: $\forall \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}, \exists \delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A, |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{Αν:}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{η}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

4) Για $x < 0$ έχουμε οτι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x + x(-x)^{1/2} \sin \frac{\pi}{2} (-x)^{-1/2} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}x + (-x)^{3/2} \sin \frac{\pi}{2} (-x)^{-1/2} \right)' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-x)^{1/2} (-1) \sin \frac{\pi}{2} (-x)^{-1/2} + \\ &\quad + (-x)^{3/2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (-x)^{-3/2} (-1) \cos \frac{\pi}{2} (-x)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{-x} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{-x}} - \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{|x|} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{|x|}} \right) = \frac{1}{2}.$$

5. Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a, b]$ με παράγωγο στο (a, b) με $f(a) = f(b)$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.

1). Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Τότε $f(0) = f(1) = 1$, $f'(x) = 1$, $x \in (0, 1)$ αλλά $f'(x) = 1 > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$
Επομένως η συνάρτηση δεν μπορεί να παραληφθεί.

2) Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Παρατηρούμε ότι f είναι σταθερή στο $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 1$ οπότε $f'(x) =$
 $\begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (0, 1] \\ -1 & \text{αν } x \in [-1, 0) \end{cases}$. Αρα, $f'(x) \neq 0$ και η ύπαρξη της f'
 στο εσωτερικό δεν μπορεί να παρατηρηθεί.

3) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Τότε f είναι σταθερή στο $[0, 1]$, παράγωγη στο $(0, 1)$ οπότε $f'(x) = 1 \neq 0$. Αρα, η υπόθεση $f(a) = f(b)$ δεν μπορεί να παρατηρηθεί.

2 ii) Έχουμε $\lim_{v \rightarrow \infty} a_{2v} = \lim_{v \rightarrow \infty} (-1)^{2v+1} (1 + \frac{1}{v}) = \lim_{v \rightarrow \infty} -(1 + \frac{1}{v}) = -1$ και $\lim_{v \rightarrow \infty} a_{2v-1} = \lim_{v \rightarrow \infty} (-1)^{2v} (1 + \frac{1}{v}) = 1$.

Αρα, 1, -1 είναι σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας. Για κάθε $\epsilon > 0$ $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ υπάρχει απόσταση του ϵ από το 0 περίπου ένα πεπεσμένο πλήθος όρων της ακολουθίας. Αρα, ϵ δεν είναι σημείο συσσώρευσης. Επομένως 1, -1 είναι τα σημεία συσσώρευσης.