

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Ι

Σεπτέμβριος 2016

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. i) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε την αρχή του Αρχιμήδη. (μον. 1)
ii) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο προσημασμένων αριθμών υπάρχει πάντα ένας ρητός. (μον. 1,5)
 2. i) Να δώσετε τους ορίσμούς της αμεσότητας, υποαμεσότητας και ορίου αμεσότητας. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο της αμεσότητας (α_n , $a_n = \frac{1}{n+1}$) (μον. 1,5)
ii) Να βρείτε το σημείο συσσώρευσης της αμεσότητας (α_n , $a_n = (-1)^{n+1} (1 + \frac{1}{n})$). (μον. 1)
 3. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο για $x=0$. (μον. 1,5)
ii) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο σημείο x_0 . Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:
 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $f(x) > f(x_0)/2$. (μον. 1)
 4. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x \sqrt{|x|} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{|x|}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
 (μον. 3,5)
 5. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να αποδείξετε ότι καμία από τις υποθέσεις δεν μπορεί να παραληφθεί. (μον. 2,5).
- * Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα.