

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN

1. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Έστω $A = \ker(f^i)$ και $B = \ker(f^{i+1})$. Δείξτε ότι (i) $A \subseteq B$ και (ii) $f(B) \subseteq A$.

Αποδ.: (i) Έστω $x \in \ker(f^i)$. Τότε $f^i(x) = 0$. Κατά συνέπεια $f(f^i(x)) = f(0) = 0$. Άρα $f^{i+1}(x) = 0$, δηλαδή $x \in \ker(f^{i+1})$.

(ii) Έστω $x \in \ker(f^{i+1})$. Τότε $f^{i+1}(x) = 0$. Κατά συνέπεια $f^i(f(x)) = 0$. Άρα $f(x) \in \ker(f^i)$.

2. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Εάν W είναι ένας υπόχωρος του V ο οποίος είναι αναλλοίωτος από την f , δείξτε ότι υπάρχει μια βάση \mathcal{B} του V , ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής:

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, αν υπάρχουν W_1, W_2 υπόχωροι του V , αναλλοίωτοι από την f , τέτοιοι ώστε $V = W_1 \oplus W_2$, δείξτε ότι υπάρχει μια βάση \mathcal{B} του V , ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής:

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ μια βάση του W . Επεκτείνουμε τη βάση αυτή σε μια βάση $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ του V . Υπολογίζουμε τον πίνακα της f ως προς τη βάση \mathcal{B} . Επειδή ο W είναι αναλλοίωτος από την f θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_{11}x_1 + \dots + a_{k1}x_k + 0 \cdot x_{k+1} + \dots + 0 \cdot x_n \\ f(x_2) &= a_{12}x_1 + \dots + a_{k2}x_k + 0 \cdot x_{k+1} + \dots + 0 \cdot x_n \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της f ως προς τη βάση \mathcal{B} θα είναι:

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Αν τώρα υπάρχουν W_1, W_2 υπόχωροι του V , αναλλοίωτοι από την f , τέτοιοι ώστε $V = W_1 \oplus W_2$, επιλέγουμε βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n\}$ των W_1 και W_2 αντίστοιχα. Τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n\}$ αποτελεί βάση του V . Υπολογίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα της f ως προς τη βάση \mathcal{B} του V . Επειδή οι W_1 και W_2 είναι αναλλοίωτοι από την f θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_{11}x_1 + \dots + a_{k1}x_k + 0 \cdot y_{k+1} + \dots + 0 \cdot y_n \\ f(x_2) &= a_{12}x_1 + \dots + a_{k2}x_k + 0 \cdot y_{k+1} + \dots + 0 \cdot y_n \\ &\dots \\ f(x_k) &= a_{1k}x_1 + \dots + a_{kk}x_k + 0 \cdot y_{k+1} + \dots + 0 \cdot y_n \\ f(y_{k+1}) &= 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_k + a_{k+1,k+1}y_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}y_n \\ &\dots \\ f(y_n) &= 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_k + a_{k+1,n}y_{k+1} + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της f ως προς τη βάση \mathcal{B} θα είναι:

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ με $A \neq I_n$. Υποθέτουμε ότι $A^3 = I_n$. Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Ισχύει το ίδιο αν $A \in M_n(\mathbb{R})$;

Αποδ.: Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε $A \in M_n(\mathbb{C})$ (διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{C}). Επειδή από την υπόθεση έχουμε $A^3 = I$, έπεται ότι το πολυώνυμο $p(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t + \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(t - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ μηδενίζεται από τον πίνακα A . Από την άσκηση 7 του φυλλαδίου 2, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο Q_A του πίνακα A διαιρεί το πολυώνυμο $p(t)$. Επιπλέον από την υπόθεση έχουμε $A \neq I_n$, δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A δεν μπορεί να είναι το $t-1$. Άρα $Q_A(t) = (t-1)(t + \frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ ή $Q_A(t) = (t-1)(t - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$ ή $Q_A(t) = t^3 - 1$. Συνεπώς επειδή σε κάθε περίπτωση οι ιδιοτιμές ανήκουν στο σώμα \mathbb{C} και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων, έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε $A \in M_n(\mathbb{R})$ (διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R}). Τώρα επειδή οι ιδιοτιμές δεν ανήκουν στο σώμα, έπεται ότι ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

4. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\chi_f(t) = -(t-2)^4(t-3)^3$ και $Q_f(t) = (t-2)^2(t-3)$, βρείτε τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan της f .

Αποδ.: Αν $\chi_f(t) = -(t-2)^4(t-3)^3$ και $Q_f(t) = (t-2)^2(t-3)$ τότε οι

πιθανές κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \end{array} \right) \quad \text{ή} \quad \left(\begin{array}{cc|cc|c} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

5. Βρείτε όλες τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow V$ με $\chi_f(t) = -(t-2)^3(t-5)^2$.

Αποδ.: Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι πέμπτου βαθμού, έπεται ότι ο πίνακας της f θα είναι 5×5 . Οι πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου είναι: $Q_A(t) = (t-2)^3(t-5)^2$ ή $Q_A(t) = (t-2)^2(t-5)^2$ ή $Q_A(t) = (t-2)(t-5)^2$ ή $Q_A(t) = (t-2)^3(t-5)$ ή $Q_A(t) = (t-2)^2(t-5)$ ή $Q_A(t) = (t-2)(t-5)$.

Αν $Q_A(t) = (t-2)^3(t-5)^2$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right) \end{array} \right).$$

Αν $Q_A(t) = (t-2)^2(t-5)^2$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Αν $Q_A(t) = (t-2)(t-5)^2$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} (2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right) \end{array} \right).$$

Αν $Q_A(t) = (t-2)^3(t-5)$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (5) & 0 \\ 0 & (5) \end{array} \right).$$

Αν $Q_A(t) = (t-2)^2(t-5)$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (5) \end{array} \right).$$

Αν $Q_A(t) = (t-2)(t-5)$ τότε οι κανονικές μορφές Jordan της f είναι:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} (2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5) \end{array} \right).$$

6. Βρείτε όλες τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan ενός πίνακα $A \in M_5(\mathbb{C})$ του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $Q_A(t) = (t-2)^2$.

Επειδή ο πίνακας A είναι 5×5 , έπεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(t) = -(t-2)^5$. Άρα οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan του A είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2) \end{array} \right) \text{ ή } \left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2) \end{array} \right).$$

7. Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Αποδ.: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(t) = -(t-1)^3(t-2)^2$ και το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $Q_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$. Συνεπώς η μορφή Jordan του A είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 \end{array} \right).$$

8. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f: V \rightarrow V$ και $g: V \rightarrow V$. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ οι ιδιοτιμές της f τέτοιες ώστε $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$, (όπου $V(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι). Αν κάθε ιδιόχωρος $V(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ είναι αναλλοίωτος από τη g , να δειχθεί $fg = gf$.

(Υποδ. Γράψτε ένα τυχαίο διάνυσμα $v \in V$ στη μορφή $v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$ με $v_i \in V(\lambda_i) \forall i = 1, 2, \dots, k$ και δείξτε ότι $g(f(v)) = f(g(v))$.)

Αποδ.: Γράφουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $v \in V$ στη μορφή $v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$ με $v_i \in V(\lambda_i) \forall i = 1, 2, \dots, k$. Έχουμε

$$\begin{aligned} g(f(v)) &= g(f(v_1 + v_2 + \dots + v_k)) \\ &= g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) \quad (\text{Επειδή } v_i \in V(\lambda_i)) \\ &= \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) + \dots + \lambda_k g(v_k) \quad (\text{Επειδή } g \text{ γραμμική}) \quad (1) \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\begin{aligned} f(g(v)) &= f(g(v_1 + v_2 + \dots + v_k)) \\ &= f(g(v_1)) + f(g(v_2)) + \dots + f(g(v_k)) \quad (\text{Επειδή } f, g \text{ γραμμικές}) \\ &= \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) + \dots + \lambda_k g(v_k) \quad (\text{Επειδή } g(v_i) \in V(\lambda_i) \text{ για κάθε } i). \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $g(f(v)) = f(g(v))$ για κάθε $v \in V$. άρα $gf = fg$.

9. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι σε κανονική μορφή Jordan.

Αποδ.: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(t) = -(t-1)^3$ και το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $Q_A(t) = -(t-1)^3$. Συνεπώς η μορφή Jordan του A είναι:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = J \iff AP = PJ$. Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2p_{11} + p_{21} + p_{31} = p_{11} \\ -p_{11} + p_{21} - p_{31} = p_{21} \\ -p_{11} - p_{21} = p_{31} \\ 2p_{12} + p_{22} + p_{32} = p_{11} + p_{12} \\ -p_{12} + p_{22} - p_{32} = p_{21} + p_{22} \\ -p_{12} - p_{22} = p_{31} + p_{32} \\ 2p_{13} + p_{23} + p_{33} = p_{12} + p_{13} \\ -p_{13} + p_{23} - p_{33} = p_{22} + p_{23} \\ -p_{13} - p_{23} = p_{32} + p_{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0 \\ p_{11} + p_{31} = 0 \\ p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0 \\ p_{12} + p_{22} + p_{32} - p_{11} = 0 \\ p_{12} + p_{32} + p_{21} = 0 \\ p_{12} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 0 \\ p_{13} + p_{23} + p_{33} - p_{12} = 0 \\ p_{13} + p_{32} + p_{22} = 0 \\ p_{13} + p_{23} + p_{32} + p_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{21} = 0 \\ p_{31} = -p_{11} \\ p_{11} \in \mathbb{R} \\ p_{12} \in \mathbb{R} \\ p_{22} = p_{11} \\ p_{32} = -p_{12} \\ p_{13} \in \mathbb{R} \\ p_{23} = p_{11} + p_{12} \\ p_{33} = -p_{13} - p_{11} \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε (υπάρχουν άπειροι πίνακες P):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί πίνακας B , όμοιος του A , που να είναι σε κανονική μορφή Jordan.

Αποδ.: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(t) = -(t+2)(t-4)^2$. Το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι $Q_A(t) = (t+2)(t-4)^2$.

Επομένως ο πίνακας B όμοιος του A , που να είναι σε κανονική μορφή Jordan είναι ο:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^2 = \text{id}_V$. Να δείξετε ότι υπάρχουν W_1, W_2 υπόχωροι του V τέτοιοι ώστε $V = W_1 \oplus W_2$, $f(x) = x$, $x \in W_1$ και $f(y) = -y$, $y \in W_2$. (Υποδ.: α) τρόπος: βρείτε τις πιθανές περιπτώσεις του ελάχιστου πολυωνύμου της f και εφαρμόστε την πρωταρχική ανάλυση, β) τρόπος: Θέσετε $W_1 = \{x \in V | f(x) = x\}$ και $W_2 = \{x \in V | f(x) = -x\}$ και αποδείξτε ότι $V = W_1 \oplus W_2$ γράφοντας ένα τυχαίο διάνυσμα του V στη μορφή $x = \frac{x-f(x)}{2} + \frac{x+f(x)}{2}$.)

Αποδ.: Α' τρόπος: Το πολυώνυμο $p(t) = t^2 - 1$ μηδενίζεται από την f . Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι $Q_f(t) = t - 1$ ή $Q_f(t) = t + 1$ ή $Q_f(t) = t^2 - 1$. Αν $Q_f(t) = t - 1$ τότε $f - \text{id}_V = 0$, δηλαδή $f(x) = x$ για κάθε $x \in V$. Άρα αν θέσουμε $W_1 = V$ και $W_2 = \{0\}$ έχουμε το αποτέλεσμα. Όμοια, αν $Q_f(t) = t + 1$ τότε $f + \text{id}_V = 0$, δηλαδή $f(x) = -x$ για κάθε $x \in V$. Άρα αν θέσουμε $W_1 = \{0\}$ και $W_2 = V$ έχουμε το αποτέλεσμα. Εάν τώρα $Q_f(t) = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$, εφαρμόζουμε την πρωταρχική ανάλυση:

$$N_{t-1} = \{v \in V | (f - \text{id}_V)v = 0\} = \{v \in V | f(v) = v\},$$

$$N_{t+1} = \{v \in V | (f + \text{id}_V)v = 0\} = \{v \in V | f(v) = -v\}.$$

Έχουμε $V = N_{t-1} \oplus N_{t+1}$. Επομένως αν θέσουμε $W_1 = N_{t-1}$ και $W_2 = N_{t+1}$ έχουμε το αποτέλεσμα.

Β' τρόπος: Θέτουμε $W_1 = \{x \in V | f(x) = x\}$ και $W_2 = \{x \in V | f(x) = -x\}$. Εάν x είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του V , τότε το x γράφεται: $x = \frac{x-f(x)}{2} + \frac{x+f(x)}{2}$. Έχουμε $f^2 = \text{id}_V$, συνεπώς $f^2(x) = x$ για κάθε $x \in V$. Άρα, $f\left(\frac{x-f(x)}{2}\right) = \frac{f(x)-f^2(x)}{2} = \frac{f(x)-x}{2} = -\frac{x-f(x)}{2}$. Άρα $\frac{x-f(x)}{2} \in W_2$. Επίσης, $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = \frac{f(x)+f^2(x)}{2} = \frac{f(x)+x}{2}$ κατά συνέπεια $\frac{x+f(x)}{2} \in W_1$. Άρα δείξαμε ότι $V = W_1 + W_2$. Αν τώρα $x \in W_1 \cap W_2$, τότε $f(x) = x$ και $f(x) = -x$. Συνεπώς $x = -x$, άρα $x = 0$. Δηλαδή $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, συνεπώς $V = W_1 \oplus W_2$.