

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1. Θεωρούμε την ακόλουθη βάση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$:

$$\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης κατά Gram-Schmidt για να μετατρέψετε τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ σε ορθοκανονική.

2. Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

3. (Θεωρία) Έστω V ένας Ερμητιανός διανυσματικός χώρος και $f : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι αν A είναι ο πίνακας της f ως προς μία ορθοκανονική βάση του V , τότε ο πίνακας της f^* ως προς την ίδια βάση του V είναι $\bar{A}^t$.

4. Έστω $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1 - i)y + 3z).$$

Βρείτε τον τύπο της συζυγούς απεικόνισης f^* .

5. Έστω λ ιδιοτιμή μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow V$ ενός Ερμητιανού διανυσματικού χώρου V . Δείξτε ότι αν $f^* \circ f = id_V$, τότε $|\lambda| = 1$.

6. Έστω W ένας υπόχωρος ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο V . Δείξτε ότι αν $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W και $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $W^\perp$, τότε η $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V .

7. Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν W είναι ένας υπόχωρος του V , δείξτε ότι $(W^\perp)^\perp = W$.

8. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y, z - x).$$

Εξετάστε αν η f είναι αυτοσυζυγής.

9. Έστω $f : V \rightarrow V$ μια αυτοσυζυγής γραμμική απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο. Υποθέτουμε ότι ο W είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V αναλλοίωτος από την f . Δείξτε ότι ο $W^\perp$ είναι επίσης αναλλοίωτος από την f .

10. Έστω $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + \sqrt{2}iy, -\sqrt{2}ix + y - \sqrt{2}iz, \sqrt{2}iy + z).$$

Εξετάστε αν η f είναι διαγωνοποιήσιμη. Βρείτε μια ΟΚΒ του $\mathbb{C}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f .