

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ II ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ-ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Άρα οι πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου είναι $Q_A(\lambda) = \lambda$ ή $Q_A(\lambda) = \lambda^2$. Όμως έχουμε $A \neq 0$, άρα $Q_A(\lambda) \neq \lambda$. Συνεπώς $Q_A(\lambda) = \lambda^2$.

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(-2)(1-\lambda) + 2(3-\lambda) + (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \\ &= (5-\lambda) + (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \\ &= (5-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) + 1) \\ &= -(\lambda-5)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο του B . Οι πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου είναι $(\lambda-5)(\lambda-2)$ ή $(\lambda-5)(\lambda-2)^2$. Πρώτα εξετάζουμε αν $(B-5I)(B-2I)$ ισούται με μηδέν. Έχουμε,

$$\begin{aligned} (B-5I)(B-2I) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι $Q_B(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$.

2. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, z + w, -2z + 4w)$.

Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^4$ είναι ο

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f :

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det((f; \mathcal{B}) - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (2-\lambda)^3(3-\lambda). \end{aligned}$$

Άρα οι πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου είναι $Q_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ ή $Q_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ ή $Q_3(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 3)$. Πρώτα εξετάζουμε αν $((f; \mathcal{B}) - 2I)((f; \mathcal{B}) - 3I)$ ισούται με μηδέν. Έχουμε,

$$\begin{aligned} ((f; \mathcal{B}) - 2I)((f; \mathcal{B}) - 3I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$((f; \mathcal{B}) - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και κατά συνέπεια

$$((f; \mathcal{B}) - 2I)^2((f; \mathcal{B}) - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε ότι $Q_f(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$.

3. Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Έστω A, B όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Έστω $Q_A(x)$ και $Q_B(x)$ τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των A και B αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $Q_A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ και $Q_B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m$. Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} Q_B(A) &= b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m \\ &= b_0I + b_1PBP^{-1} + b_2(PBP^{-1})^2 + \dots + b_{m-1}(PBP^{-1})^{m-1} + (PBP^{-1})^m \\ &= b_0I + b_1PBP^{-1} + b_2(PB^2P^{-1}) + \dots + b_{m-1}PB^{m-1}P^{-1} + PB^mP^{-1} \\ &= P(b_0I + b_1B + b_2B^2 + \dots + b_{m-1}B^{m-1} + B^m)P^{-1} \\ &= P(Q_B(B))P^{-1} \\ &= P\mathbf{0}P^{-1} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $Q_B(x)$ μηδενίζεται από τον πίνακα A . Άρα από τη θεωρία συμπεραίνουμε ότι το $Q_A(x)$ διαιρεί το $Q_B(x)$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $Q_A(x)$ μηδενίζεται από τον πίνακα B , απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το $Q_B(x)$ διαιρεί το $Q_A(x)$. Άρα $Q_A(x) = Q_B(x)$.

4. Βρείτε τα χαρακτηριστικά και τα ελάχιστα πολυώνυμα των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Είναι οι A, B όμοιοι μεταξύ τους;

Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & b \\ 0 & a+b-\lambda & 0 \\ b & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(a+b-\lambda)(a-\lambda) - b^2(a+b-\lambda) \\ &= (a+b-\lambda)((a-\lambda)^2 - b^2) \\ &= (a+b-\lambda)^2(a-b-\lambda) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a+b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-b-\lambda & 0 \\ b & 0 & a+b-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a+b-\lambda)^2(a-b-\lambda) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το Q_A . Οι πιθανές τιμές του $Q_A(\lambda)$ είναι $(\lambda - a - b)(\lambda - a + b)$ ή $(\lambda - a - b)^2(\lambda - a + b)$. Πρώτα εξετάζουμε αν $(A - (a + b)I)(A - (a - b)I)$ ισούται με μηδέν.

$$\begin{aligned}(A - (a + b)I)(A - (a - b)I) &= \begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Άρα $Q_A(\lambda) = (\lambda - a - b)(\lambda - a + b)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $Q_B(\lambda)$. Οι πιθανές τιμές του $Q_B(\lambda)$ είναι $(\lambda - a - b)(\lambda - a + b)$ ή $(\lambda - a - b)^2(\lambda - a + b)$. Πρώτα εξετάζουμε αν $(B - (a + b)I)(B - (a - b)I)$ ισούται με μηδέν.

$$\begin{aligned}(B - (a + b)I)(B - (a - b)I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{Αν } b \neq 0).\end{aligned}$$

Άρα $Q_A(\lambda) = (\lambda - a - b)^2(\lambda - a + b)$. Δηλαδή οι πίνακες A, B έχουν διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα. Άρα από την άσκηση 3 συμπεραίνουμε ότι οι A, B δεν είναι όμοιοι.

5. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και έστω $P(x) \in k[x]$ ένα πολυώνυμο του x με συντελεστές στο k . Να δείξετε ότι ο μηδενόχωρος της f που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο P :

$$N_P = \{v \in V \mid P(f)(v) = 0\},$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $v_1, v_2 \in N_P$, $v_1 + v_2 \in N_P$ και για κάθε $\lambda \in k$ και για κάθε $v \in N_P$ έχουμε $\lambda v \in N_P$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $v_1, v_2 \in N_P$, δηλαδή $P(f)(v_1) = 0$ και $P(f)(v_2) = 0$. Λόγω γραμμικότητας της απεικόνισης $P(f)$, έχουμε $P(f)(v_1 + v_2) = P(f)(v_1) + P(f)(v_2) = 0 + 0 = 0$. Άρα $v_1 + v_2 \in N_P$. Όμοια αν $\lambda \in k$ και $v \in N_P$ έχουμε $P(f)(v) = 0$. Λόγω γραμμικότητας της απεικόνισης $P(f)$, έχουμε $P(f)(\lambda v) = \lambda P(f)(v) = \lambda \cdot 0 = 0$. Άρα $\lambda v \in N_P$.

6. Να δείξετε ότι οι πίνακες A και A^t έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο.

Έστω χ_A και χ_{A^t} τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του A και του A^t αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t) = \det(A^t - (\lambda I)^t) \\ &= \det(A^t - \lambda I^t) = \det(A^t - \lambda I) = \chi_{A^t}(\lambda).\end{aligned}$$

Έστω $Q_A(x)$ και $Q_{A^t}(x)$ τα ελάχιστα πολυώνυμα των A και A^t αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $Q_A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ και $Q_{A^t}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m$. Όμως έχουμε $Q_{A^t}(A) = b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m$ και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} (Q_{A^t}(A))^t &= (b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m)^t \\ &= b_0I + b_1A^t + b_2(A^2)^t + \dots + b_{m-1}(A^{m-1})^t + (A^m)^t \\ &= b_0I + b_1A^t + b_2(A^t)^2 + \dots + b_{m-1}(A^t)^{m-1} + (A^t)^m \\ &= Q_{A^t}(A^t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα $(Q_{A^t}(A))^t = 0$ και κατά συνέπεια $Q_{A^t}(A) = 0$. Δηλαδή το πολυώνυμο Q_{A^t} μηδενίζεται από τον πίνακα A . Άρα από την άσκηση 7 συμπεραίνουμε ότι το $Q_A(x)$ διαιρεί το $Q_{A^t}(x)$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $Q_A(x)$ μηδενίζεται από τον πίνακα A^t , απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το $Q_{A^t}(x)$ διαιρεί το $Q_A(x)$. Άρα $Q_A(x) = Q_{A^t}(x)$.

7. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $P(x) \in k[x]$ ένα πολυώνυμο του x με συντελεστές στο k που μηδενίζεται από την f (δηλ. $P(f) = 0$). Να δείξετε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο Q_f της f διαιρεί το $P(x)$.

Έστω $m = \deg Q_f(x)$ και $k = \deg P(x)$.

Έστω $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$ (με $a_k \neq 0$). Θέτω $P_1(x) = \frac{1}{a_k}P(x) = \frac{a_0}{a_k} + \frac{a_1}{a_k}x + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k}x^{k-1} + x^k$. Έχουμε $P_1(f) = \frac{1}{a_k}P(f) = 0$. Άρα το $P_1(x)$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο που μηδενίζεται από την f . Όμως, επειδή το $Q_f(x)$ είναι το ελάχιστου βαθμού μονικό πολυώνυμο που μηδενίζεται από την f , θα έχουμε $m \leq k$.

α) Αν $m = k$: τότε το $P_1(x)$ είναι ένα ελάχιστου βαθμού μονικό πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον f . Άρα από την μοναδικότητα του ελάχιστου πολυωνύμου έπεται ότι $P_1(x) = Q_f(x)$. Συνεπώς, $P(x) = a_k P_1(x) = a_k Q_f(x)$, δηλαδή το $Q_f(x)$ διαιρεί το $P(x)$.

β) Αν $m < k$: τότε από την Ευκλείδια διαίρεση πολυωνύμων, υπάρχουν $S(x), R(x) \in k[x]$ τέτοια ώστε

$$P(x) = S(x)Q_f(x) + R(x) \text{ με } \deg(R(x)) < \deg(Q_f(x)) \text{ ή } R(x) \equiv 0. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι $R(x) \neq 0$. Από τον τύπο (1) έχουμε, $R(x) = P(x) - S(x)Q_f(x)$ και κατά συνέπεια $R(f) = P(f) - S(f)Q_f(f) = 0 - 0 = 0$. Αν $b_r \neq 0$ είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $R(x)$, τότε το $R_1(x) = \frac{1}{b_r}R(x)$ είναι μονικό πολυώνυμο που μηδενίζεται από το A . Συνεπώς, $\deg(Q_A(x)) \leq \deg(R(x))$. Αδύνατο, άρα $R(x) \equiv 0$ και κατά συνέπεια ο τύπος (1) γίνεται: $P(x) = S(x)Q_f(x)$ που σημαίνει ότι το $Q_f(x)$ διαιρεί το $P(x)$.

8. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση με $f^2 = 3f$. Βρείτε τις πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου της f . Είναι η f διαγωνοποιήσιμη;

Επειδή $f^2 = 3f$ έπεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$ μηδενίζεται από την f . Άρα από την άσκηση 7 το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(x)$ διαιρεί το $P(x)$. Άρα οι πιθανές τιμές του ελάχιστου πολυωνύμου είναι $x(x-3)$ ή $(x-3)$ ή x . Όμως σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις το $Q_f(x)$ γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

9. Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Δείξτε ότι $Q_A(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$. Βρείτε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$: N_{x^2+1} και N_{x-2} για τον A .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda[(\lambda+2)(\lambda-4)+8] + 8 - 2\lambda - 4 - 4 + 2 + \lambda \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 \\ &= -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Επειδή τα πολυώνυμα $\lambda - 2$ και $\lambda^2 + 1$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ισούται με:

$$Q_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$

Υπολογίζουμε τους χώρους $N_{\lambda-2}$ και N_{λ^2+1} . Πρώτα έχουμε $N_{\lambda-2} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I)v = 0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2x - 2y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4x + 4y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα $N_{\lambda-2} = \{(0, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το N_{λ^2+1} . Έχουμε $N_{\lambda^2+1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A^2 + I)v = 0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -10 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 5z = 0 \\ -10y + 10z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x, z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα $N_{\lambda^2+1} = \{(x, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$. Συνεπώς από το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης έχουμε:

$$\mathbb{R}^3 = N_{\lambda-2} \oplus N_{\lambda^2+1}.$$

10. Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, με πίνακα ως προς την κανονική βάση τον

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την πρωταρχική ανάλυση της f και έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

όμοιο με τον A .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -3 & -2 \\ 4 & -1 - \lambda & -2 \\ 10 & -5 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (6-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1-\lambda & -2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda + 4).
\end{aligned}$$

Επειδή τα πολυώνυμα $\lambda-2$ και $\lambda^2 - \lambda + 4$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f ισούται με:

$$Q_f(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda + 4).$$

Υπολογίζουμε τους χώρους $N_{\lambda-2}$ και $N_{\lambda^2-\lambda+4}$. Πρώτα έχουμε $N_{\lambda-2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A-2I)x=0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y-2z=0 \\ 4x-3y-2z=0 \\ 10x-5y-4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y-2z=0 \\ 10x-5y-4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=5x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Άρα $N_{\lambda-2} = \{(x, -2x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $N_{\lambda^2-\lambda+4}$. Έχουμε $N_{\lambda^2-\lambda+4} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A^2 - A + 4I)x=0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\left[\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 20 & -15 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ -4x+4y=0 \\ 10x-10y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα $N_{\lambda^2-\lambda+4} = \{(y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Συνεπώς από το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης έχουμε:

$$\mathbb{R}^3 = N_{\lambda-2} \oplus N_{\lambda^2-\lambda+4}.$$

Άρα μπορούμε να βρούμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από διανύσματα των μηδενόχωρων $N_{\lambda-4}$ και $N_{\lambda^2-\lambda+4}$:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, 5), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Από την υπόθεση βρίσκουμε τον τύπο της $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = (6x - 3y - 2z, 4x - y - 2z, 10x - 5y - 2z)$. Υπολογίζουμε τώρα τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1, -2, 5) &= (2, -4, 10) = 2(1, -2, 0) + 0(1, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ f(1, 1, 0) &= (3, 3, 5) = 0(1, -2, 5) + 3(1, 1, 0) + 5(0, 0, 1) \\ f(0, 0, 1) &= (-2, -2, -2) = 0(1, -2, 5) + (-2)(1, 1, 0) + (-2)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Άρα

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, με $f(x, y, z) = (x + y - z, -x + 3y - z, -x + y)$. Βρείτε την πρωταρχική ανάλυση της f . Στη συνέχεια βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε ο πίνακας της f ως προς αυτή τη βάση να είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^8$ είναι:

$$(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det((f; \mathcal{B}) - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda + 1] + (1-\lambda) - (2-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda \\
&= -\lambda(\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Επειδή τα πολυώνυμα $\lambda-2$ και λ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f ισούται με $\lambda(\lambda-2)$ ή $\lambda(\lambda-2)^2$. Πρώτα εξετάζουμε αν f^2-2f ισούται με μηδέν. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(f^2-2f)(x,y,z) &= f(f(x,y,z)) - 2f(x,y,z) \\
&= f(x+y-z, -x+3y-z, -x+y) - 2(x+y-z, -x+3y-z, -x+y) \\
&= (x+3y-2z, -3x+7y-2z, -2x+2y) - (2x+2y-2z, -2x+6y-2z, -2x+2y) \\
&= (-x+y, -x+y, 0) \neq 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $Q_f(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$. Υπολογίζουμε τους χώρους $N_{(\lambda-2)^2}$ και N_λ . Πρώτα έχουμε $N_{(\lambda-2)^2} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (f-2id)^2 v = 0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
&(f-2id)^2(x,y,z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(f-2id) \circ (f-2id)(x,y,z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(f-2id)((x+y-z, -x+3y-z, -x+y) - (2x, 2y, 2z)) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(f-2id)(-x+y-z, -x+y-z, -x+y-2z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(-x+y, -x+y, 0) - (-2x+2y-2z, -2x+2y-2z, -2x+2y-4z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(x-y+2z, x-y+2z, 2x-2y+4z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &x = y-2z, \quad y, z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άρα $N_{(\lambda-2)^2} = \{(y-2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το N_λ . Έχουμε $N_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 0\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &(x+y-z, -x+3y-z, -x+y) = (0,0,0) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = y \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα $N_\lambda = \{(y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Συνεπώς από το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης έχουμε:

$$\mathbb{R}^3 = N_{(\lambda-2)^2} \oplus N_\lambda.$$

Άρα μπορούμε να βρούμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από διανύσματα των μηδενόχωρων $N_{(\lambda-2)^2}$ και N_λ :

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1), (1, 1, 2)\}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}f(1, 1, 0) &= (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0) + 0(-2, 0, 1) + 0(1, 1, 2) \\f(-2, 0, 1) &= (-3, 1, 2) = 1(1, 1, 0) + 2(-2, 0, 1) + 0(1, 1, 2) \\f(1, 1, 2) &= (0, 0, 0) = 0(1, 1, 0) + 0(-2, 0, 1) + 0(1, 1, 2).\end{aligned}$$

Άρα

$$(f; \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$