

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

1. Θεωρούμε τον πίνακα A με πραγματικούς αριθμούς:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και η διάσταση του χώρου $V(\lambda)$ για κάθε ιδιοτιμή λ .

Έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)^2(1-\lambda). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε δύο ιδιοτιμές: το 1 και το 2 (διπλή). Βρίσκουμε τη διάσταση του $V(1)$:

$$V(1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 5x - 6y - 6z = x \\ -x + 4y + 2z = y \\ 3x - 6y - 4z = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - 6y - 5z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = z \\ y = -\frac{z}{3} \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(1) = \{(z, -\frac{z}{3}, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} V(1) = 1$. Τώρα υπολογίζουμε τη διάσταση του $V(2)$:

$$V(2) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x - 6y - 6z = 2x \\ -x + 4y + 2z = 2y \\ 3x - 6y - 4z = 2z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 6y - 6z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2(y + z) \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(2) = \{(2(y+z), y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} V(2) = 2$.

2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

Βρίσκουμε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-3). \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι το 3 και το 2 (διπλή). Υπολογίζουμε το $V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 2(x, y, z)\}$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 2(x, y, z) &\Leftrightarrow (2x + y, y - z, 2y + 4z) = 2(x, y, z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2x = 0 \\ y - z - 2y = 0 \\ 2y + 4z - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(2) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $V(3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 3(x, y, z)\}$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 3(x, y, z) &\Leftrightarrow (2x + y, y - z, 2y + 4z) = 3(x, y, z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3x = 0 \\ y - z - 3y = 0 \\ 2y + 4z - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(3) = \{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιόχωρους των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Για τον πρώτο πίνακα έχουμε:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1)^2(2 - \lambda). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε δύο ιδιοτιμές: το 2 και το -1 (διπλή). Υπολογίζουμε τον $V(-1)$:

$$V(-1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(-1) = \{(-y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $V(2)$:

$$V(2) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2y - x - z = 0 \\ 2z - x - y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(2) = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Για τον δεύτερο πίνακα έχουμε:

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε τρεις ιδιοτιμές: το 1, το 5 και το 7. Υπολογίζουμε τον $V(1)$:

$$V(1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Bv = v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y + 2z = x \\ 5y - z = y \\ 7z = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(1) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $V(5)$:

$$V(5) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Bv = 5v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y + 2z = 5x \\ 5y - z = 5y \\ 7z = 5z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{y}{4} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(5) = \{(\frac{y}{4}, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Τέλος υπολογίζουμε το $V(7)$:

$$V(7) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Bv = 7v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y + 2z = 7x \\ 5y - z = 7y \\ 7z = 7z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{z}{4} \\ y = -\frac{z}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(7) = \{(\frac{z}{4}, -\frac{z}{2}, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

4. Να εξετάσετε αν είναι τριγωνοποιήσιμος ο πίνακας A του $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο $M_2(\mathbb{R})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Για να είναι τριγωνοποιήσιμος ο πίνακας θα πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα να είναι πραγματικές. Έχουμε

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda^2 + 1).\end{aligned}$$

Δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι το i και $-i$ οι οποίες δεν είναι πραγματικές. Συνεπώς ο πίνακας δεν είναι τριγωνοποιήσιμος.

5. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1} , αν γνωρίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= \det(A - \lambda A A^{-1}) \quad (\text{διότι } A A^{-1} = I_n) \\ &= \det(\lambda \lambda^{-1} A - \lambda A A^{-1}) \quad (\text{διότι } \lambda \lambda^{-1} = 1) \\ &= \det(-\lambda A(A^{-1} - \lambda^{-1} I_n)) \quad (\text{βγάζουμε κοινό παράγοντα το } -\lambda A) \\ &= \det(-\lambda A) \det(A^{-1} - \lambda^{-1} I_n) \\ &= (-\lambda)^n \det(A) \det(A^{-1} - \lambda^{-1} I_n).\end{aligned}$$

Άρα αν $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ και $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda I_n)$ είναι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των A και A^{-1} αντίστοιχα από την παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n \det(A) \chi_{A^{-1}}(\lambda^{-1}).$$

Συνεπώς, αλλάζοντας το λ με το λ^{-1} , το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1} γράφεται:

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{1}{\det(A)} (-\lambda)^n \chi_A(\lambda^{-1}).$$

6. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A .

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι κάθε πίνακας του $M_n(\mathbb{C})$ τριγωνοποιείται. Επομένως υπάρχει ένας άνω τριγωνικός πίνακας $B \in M_n(\mathbb{C})$ όμοιος με τον A . Ο πίνακας B θα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B θα είναι: $\chi_B(\lambda) = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) \dots (b_{nn} - \lambda)$. Άρα οι ιδιοτιμές του A που είναι οι ίδιες με τις ιδιοτιμές του B

είναι οι: $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$. Όμως $\det(B) = b_{11}b_{22} \cdots b_{nn}$ και $\det(B) = \det(A)$ επειδή οι A, B είναι όμοιοι. Άρα $\det(A)$ ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών.

7. Εξετάστε αν η παρακάτω γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z).$$

Να υπολογισθούν οι διαστάσεις των ιδιοχώρων.

Βρίσκουμε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι το 1 (διπλή) και το 2. Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Επειδή η ιδιοτιμή 1 έχει πολλαπλότητα δύο, εξετάζουμε τη διάσταση του $V(1)$.

$$V(1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (x, y, z)\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} &(-2y - 3z, x + 3y + 3z, z) = (x, y, z) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ z = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = -2y - 3z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(1) = \{(-2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} V(1) = 2$. Άρα η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

8. Εξετάστε αν ο παρακάτω πίνακας του $M_3(\mathbb{C})$ είναι διαγωνοποιήσιμος:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρώτα βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A .

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda-i)(\lambda+i).\end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι το 3, το i και το $-i$. Όλες οι ιδιοτιμές ανήκουν στο $\mathbb{C}$ και έχουν πολλαπλότητα 1. Άρα ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

9. Αφού αποδείξτε ότι ο πίνακας $A \in M_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος, να βρεθεί ένας πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Πρώτα βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A .

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1-\lambda)^2(\lambda+1).\end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι το -1 , και το 1 (διπλή). Όλες οι ιδιοτιμές ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Βρίσκουμε τη διάσταση του $V(1)$:

$$V(1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 2z = x \\ -3y + 4z = y \\ -2y + 3z = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}\end{aligned}$$

Άρα,

$$V(1) = \{(x, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} V(1) = 2$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε το $V(-1)$:

$$V(-1) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 2z = -x \\ -3y + 4z = -y \\ -2y + 3z = -z \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(-1) = \{(z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} V(-1) = 1$. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} V(1) + \dim_{\mathbb{R}} V(-1) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Δηλαδή ο A είναι όμοιος μ' έναν διαγώνιο πίνακα, έστω Δ . Επειδή ο Δ θα έχει ιδιοτιμές το 1 (διπλή), και το -1 , έπεται ότι

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Θα βρούμε πίνακα P αντιστρέψιμο τέτοιον ώστε $A = P\Delta P^{-1}$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας P έχει στήλες ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Βρίσκουμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα: ο ιδιόχωρος $V(1)$ έχει βάση $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ και ο ιδιόχωρος $V(-1)$ έχει βάση $\{(1, 2, 1)\}$. Συνεπώς το σύνολο $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. Άρα

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Να υπολογισθεί ο πίνακας A^n , $n \in \mathbb{N}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Πρώτα δείχνουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Έχουμε

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-5).\end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι το -1 και το 5 . Άρα ο A διαγωνοποιείται. Δηλαδή ο A είναι όμοιος μ' έναν διαγώνιο πίνακα, έστω Δ . Επειδή ο Δ θα έχει ιδιοτιμές το -1 , και το 5 , έπεται ότι

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τους ιδιόχωρους, για $\lambda = -1$ και $\lambda = 5$:

1) Για $\lambda = -1$: υπολογίζουμε το $V(-1)$:

$$V(-1) = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Av = -v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4y = -x \\ 2x + 3y = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & 2x + 4y = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}\end{aligned}$$

Άρα,

$$V(-1) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

2) Για $\lambda = 5$: υπολογίζουμε το $V(5)$:

$$V(5) = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Av = 5v\}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4y = 5x \\ 2x + 3y = 5y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = y \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}\end{aligned}$$

Άρα,

$$V(5) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Άρα τοποθετώντας δύο ιδιοδιανύσματα για στήλες του P :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τον P^{-1} :

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Delta P^{-1})^n \\ &= P\Delta^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} & 5^n \\ (-1)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{2}{3}5^n \\ \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ax + y, x + ay)$, είναι διαγωνοποιήσιμη.

Πρώτα βρίσκουμε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$[f] = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= (a - \lambda)^2 - 1 \\ &= (a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1). \end{aligned}$$

Άρα η f έχει δύο ιδιοτιμές, το $a - 1$ και το $a + 1$. Κατά συνέπεια η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

12. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Η f λέγεται μηδενοδύναμη αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f^m = 0$. Αν f είναι μηδενοδύναμη εξετάστε αν η f διαγωνοποιείται.

Έστω λ ιδιοτιμή της f . Τότε υπάρχει $v \neq 0$ τέτοιο ώστε $f(v) = \lambda v$. Εφαρμόζοντας την f στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$. Εφαρμόζοντας m -φορές την f έχουμε $f^m(v) = \lambda^m v$. Επειδή όμως $f^m = 0$

και $v \neq 0$ έπεται ότι $\lambda = 0$. Άρα το 0 είναι η μοναδική ιδιοτιμή της f πολλαπλότητας n . Υπολογίζουμε τώρα τον ιδιόχωρο $V(0)$:

$$V(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Για να είναι η f διαγωνοποιήσιμη θα πρέπει η διάσταση του $V(0)$ να ισούται με την πολλαπλότητα του 0, που είναι n . Αυτό όμως ισχύει μόνο όταν $V(0) = V$, δηλαδή $f = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν f είναι μηδενοδύναμος τότε f διαγωνοποιείται αν και μόνον αν $f = 0$.