ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ
ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ-ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, z + w, -2z + 4w)$.

3. Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

4. Βρείτε τα χαρακτηριστικά και τα ελάχιστα πολυώνυμα των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Είναι οι A, B όμοιοι μεταξύ τους;

5. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και έστω $P(x) \in k[x]$ ένα πολυώνυμο του x με συντελεστές στο k. Να δείξετε ότι ο μηδενόχωρος της f που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο P:

$$N_P = \{v \in V \mid P(f)(v) = 0\},$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

6. Να δείξετε ότι οι πίνακες A και A^t έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο.

7. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $P(x) \in k[x]$ ένα πολυώνυμο του x με συντελεστές στο k που μηδενίζεται από την f (δηλ. $P(f) = 0$). Να δείξετε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο Q_f της f διαιρεί το P.

8. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση με $f^2 = 3f$. Βρείτε τις πιθανές τιμές του ελαχίστου πολυωνύμου της f. Είναι η f διαγωνοποιήσιμη;

9. Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Δείξτε ότι $Q_f(t) = (t^2+1)(t-2)$. Βρείτε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$: N_{t^2+1} και N_{t-2} για τον A.

10. Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, με πίνακα ως προς την κανονική βάση τον

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την πρωταρχική ανάλυση της f και έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

όμοιο με τον A.

11. Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, με $f(x,y,z) = (x+y-z, -x+3y-z, -x+y)$. Βρείτε την πρωταρχική ανάλυση της f. Στη συνέχεια βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε ο πίνακας της f ως προς αυτή τη βάση να είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}.$$