I. ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Ορισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα.

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{k}$ το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των πραγματικών ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1.1: Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στο $\mathbb{k}$. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{k}$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{k}^n$ τέτοιο ώστε:

$$Ax = \lambda x.$$

Ένα τέτοιο διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** για την ιδιοτιμή λ.

Ορισμός 1.1.2: Ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A (συμβ. $\chi_A(\lambda)$) το παρακάτω πολυώνυμο:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

όπου I ο ταυτοτικός πίνακας $n \times n$.

Παρατηρήσεις: α) Ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα $n \times n$ είναι n.

β) Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα $n \times n$ είναι $(-1)^n$.

Λήμμα 1.1.3: Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Αποδ.: Έστω A, B όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε:

$$B = P^{-1}AP.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\
&= \det(A - \lambda I) \\
&= \chi_A(\lambda). \square
\end{aligned}$$

Πρόταση 1.1.4: Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου.

Αποδ.: Το λ είναι ιδιοτιμή του A $\iff$ $\exists x \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$

$\iff$ $\exists x \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $Ax - \lambda x = \mathbf{0}$

$\iff$ $\exists x \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \text{Το ομογενές σύστημα } (A-\lambda I)x = \mathbf{0} \text{ έχει μη μηδενική λύση} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det(A-\lambda I) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \chi_A(\lambda) = 0.\square
\end{aligned}
$$

Παρατηρήσεις: α) Οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Πράγματι, έπεται εύκολα από το Λήμμα 1.1.3 και την πρόταση 1.1.4.

β) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (και τις ίδιες ιδιοτιμές) αλλά δεν είναι όμοιοι.

Παραδείγματα: 1) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\chi_A(\lambda) = \lambda^2+1$. Άρα ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

2) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι το i και το $-i$.

1.2 Ορισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων μιας γραμμικής απεικόνισης.

Έστω V διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

Ορισμός 1.2.1: Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{k}$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** της f αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε:

$$f(v) = \lambda v.$$

Ένα τέτοιο διάνυσμα v ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** για την ιδιοτιμή λ.

Ορισμός 1.2.2: Έστω $\lambda \in \mathbb{k}$ ιδιοτιμή της f (αντιστ. του πίνακα A). Ονομάζουμε **ιδιόχωρο** της f (αντιστ. του A) για την ιδιοτιμή λ (συμβ. $V(\lambda)$), το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων της f (αντιστ. του A) για την ιδιοτιμή λ μαζί με το μηδενικό διάνυσμα. Δηλαδή

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

(Αντίστοιχα για τον πίνακα A:

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{k}^n \mid Ax = \lambda x\}.)$$

Λήμμα 1.2.3: Κάθε ιδιόχωρος είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.:Έστω $v, v' \in V(\lambda), \mu \in \mathbb{k}$. Τότε

$$f(\mu v + v') = \mu f(v) + f(v') = \mu\lambda v + \lambda v' = \lambda(\mu v + v').$$

Συνεπώς το $\mu v + v'$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ. Άρα $\mu v + v' \in V(\lambda)$.$\square$

Ορισμός 1.2.4: Ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της γραμμικής απεικόνισης f (συμβ. $\chi_f(\lambda)$) το παρακάτω πολυώνυμο:

$$\chi_f(\lambda) = \det((f;\mathcal{B}) - \lambda I),$$

όπου $(f;\mathcal{B})$ είναι ο πίνακας της f ως προς μία βάση $\mathcal{B}$ του V και I ο ταυτοτικός πίνακας $n \times n$.

Παρατήρηση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας γραμμικής απεικόνισης f **ΔΕΝ** εξαρτάται από την επιλογή της βάσης V. Πράγματι, αν $(f;\mathcal{B}')$ είναι ο πίνακας της f ως προς μία άλλη βάση του V τότε οι $(f;\mathcal{B}), (f;\mathcal{B}')$ είναι όμοιοι. Συνεπώς από το λήμμα 1.1.3 έπεται ότι $\det((f;\mathcal{B}) - \lambda I) = \det((f;\mathcal{B}') - \lambda I)$.

Πρόταση 1.2.5: Οι ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης f είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου.

Αποδ.: Το λ είναι ιδιοτιμή της f

$$\begin{aligned}
&\iff \exists v \neq \mathbf{0} \text{ τέτοιο ώστε } f(v) = \lambda v \\
&\iff \exists v \neq \mathbf{0} \text{ τέτοιο ώστε } f(v) - \lambda v = \mathbf{0} \\
&\iff \exists v \neq \mathbf{0} \text{ τέτοιο ώστε } (f - \lambda\ \mathrm{Id})v = \mathbf{0} \\
&\iff \mathrm{Ker}\ (f - \lambda\ \mathrm{Id}) \neq \{\mathbf{0}\} \\
&\iff \det((f - \lambda\ \mathrm{Id};\mathcal{B})) = 0 \\
&\iff \det((f;\mathcal{B}) - \lambda I) = 0 \\
&\iff \chi_f(\lambda) = 0.\square
\end{aligned}$$

Παραδείγματα: 1) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοιος ώστε

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y).$$

Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι:

$$(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).
\end{aligned}$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές τς f είναι το 4 και το -1.

2) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιος ώστε

$$f(x,y,z) = (5x - 6y - 6z, -x + 4y + 2z, 3x - 6y - 4z).$$

Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι:

$$(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι:

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -2+\lambda & -4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2)[(5-\lambda)(\lambda+2) - 6\cdot 2] \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda-1).
\end{aligned}$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της f είναι το 2 (διπλή) και το 1.

1.3 Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες και γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 1.3.1: Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος** αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Παρατήρηση: Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνον αν ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Ορισμός 1.3.2: Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμη** αν υπάρχει μία βάση του V τέτοια ώστε ο πίνακας της f ως προς αυτή τη βάση είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Παρατήρηση: Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ είναι διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνον αν ο πίνακας της f ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Θεώρημα 1.3.3: Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ (αντίστοιχα μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$) είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνον αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{k}^n$ (αντιστ. του V) που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A (αντιστ. της f).

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Έστω A ένας διαγωνιοποιήσιμος πίνακας $n \times n$. Συνεπώς υπάρχει P αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \quad (\star)$$

Από το Λήμμα 1.1.3 οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, άρα επειδή οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του D συμπεραίνουμε ότι είναι οι ιδιοτιμές και του A. Γράφουμε $P = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, όπου C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ η i στήλη του P. Εφόσων ο P είναι αντιστρέψιμος από το πόρισμα της εφαρμογής του κεφαλαίου III (σελ. 10), έχουμε ότι τα διανύσματα $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $\Bbbk^n$. Επειδή όμως η διάσταση του $\Bbbk^n$ είναι n, από το πόρισμα 3.7.9 (i) έχουμε ότι τα διανύσματα $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ αποτελούν βάση του $\Bbbk^n$. Από την ισότητα της $(\star)$ παίρνουμε $AP = PD$. Κατά συνέπεια

$$A(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (C_1, C_2, \ldots, C_n)\text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

άρα

$$AC_i = \lambda_i C_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

δηλαδή το C_i είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_i.

($\Longleftarrow$) Έστω $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του A. Έστω λ_i η ιδιοτιμή του X_i για $i = 1, 2, \ldots, n$. Θεωρούμε τον πίνακα P με στήλες τα διανύσματα $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Δηλαδή

$$P = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Επειδή τα $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα από το πόρισμα της εφαρμογής του κεφαλαίου III (σελ. 10), έχουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$AX_i = \lambda_i X_i \text{ για } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Συνεπώς

$$AP = P\text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

δηλαδή

$$P^{-1}AP = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D.\square$$

Λήμμα 1.3.4: Έστω A πίνακας $n \times n$ και λ, μ δύο ιδιοτιμές του A. Αν $\lambda \neq \mu$, τότε $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{0\}$.

Αποδ.: Έστω λ, μ δύο ιδιοτιμές του πίνακα A με $\lambda \neq \mu$. Έστω $v \in V(\lambda) \cap V(\mu)$. Τότε έχουμε $Av = \lambda v$ και $Av = \mu v$. Άρα $\lambda v = \mu v$ και κατά συνέπεια $(\lambda - \mu)v = 0$. Επειδή όμως $\lambda \neq \mu$, άρα $v = 0.\square$

Θεώρημα 1.3.5: Εάν ο πίνακας $A \in M_n(\Bbbk)$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Αποδ.: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι n διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots n$ $(i \neq j)$. Επίσης έχουμε $dimV(\lambda_i) \geq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots n$. Άρα

$$\dim(V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)) = \dim(V(\lambda_1)) + \dim(V(\lambda_2)) + \cdots + \dim(V(\lambda_n)) \geq n. \quad (1)$$

Όμως επειδή ο $V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)$ είναι υπόχωρος του $\Bbbk^n$ έπεται ότι

$$\dim(V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)) \leq n. \quad (2)$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε $\dim(V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)) = n$ και κατά συνέπεια $V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n) = \Bbbk^n$. Άρα διαλέγοντας μία βάση από κάθε υπόχωρο $V(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ παίρνουμε μια βάση του $\Bbbk^n$. Συνεπώς από το θεώρημα 1.3.3 έπεται ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.□

Εφαρμογή (Υπολογισμός δύναμης ενός διαγωνιοποιήσιμου πίνακα):

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας. Υπάρχει P αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε

$$D = P^{-1}AP$$

και κατά συνέπεια

$$D^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP,$$

άρα

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Δηλαδή για να βρούμε την δύναμη A^n ενός διαγωνιοποιήσιμου πίνακα A για κάποιο φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε τον πίνακα P σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος 1.3.3 και τον διαγώνιο πίνακα D για τους οποίους έχουμε:

$$A = PDP^{-1}.$$

Έτσι από την παραπάνω συζήτηση έχουμε

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε τον A^{99}. Οι ιδιοτιμές του A είναι το 4 και το -1. Επειδή ο A έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές έπεται ότι είναι διαγωνοποιήσιμος. Άρα ο A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους ιδιόχωρους για κάθε ιδιοτιμή:

α) Για $\lambda = 4$.

Λύνουμε την εξίσωση $Ax = 4x$. Θέτουμε $x = (x_1, x_2)$. Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Άρα ο ιδιόχωρος του 4 είναι:

$$V(4) = \{(x_1, \frac{3}{2}x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

α) Για $\lambda = -1$.
Λύνουμε την εξίσωση $Ax = -x$. Θέτουμε $x = (x_1, x_2)$. Έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -x_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Άρα ο ιδιόχωρος του 4 είναι:

$$V(-1) = \{(x_1, -x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Επομένως $P = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right)$ και $P^{-1} = -\frac{2}{5}\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$.
Έχουμε

$$A = PDP^{-1},$$

συνεπώς έχουμε

$$A^{99} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 4^{99} & 0 \\ 0 & (-1)^{99} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right).$$

1.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

1.3.1 Θεώρημα Cayley-Hamilton: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ πίνακας $n \times n$. Αν $\chi_A(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε $\chi_A(A) = 0$. Δηλαδή κάθε πίνακας «μηδενίζει» το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A γράφεται:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n).$$

Από το κεφάλαιο ΙΙ έχουμε ότι

$$(A - \lambda I)\text{adj }(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I = \chi_A(\lambda)I \quad (\star).$$

Έχουμε

$$\text{adj }(A - \lambda I) = (P_{ij}(\lambda)),$$

όπου $P_{ij}(\lambda)$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n-1$ ως προς λ. Έστω ότι

$$\text{adj }(A - \lambda I) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1},$$

όπου $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_n(k)$. Από την $(\star)$ παίρνουμε

$$(A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n)I.$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\begin{aligned}
AB_0 &= (-1)^n \alpha_n I \\
-B_0 + AB_1 &= (-1)^n \alpha_{n-1} I \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
-B_{n-2} + AB_{n-1} &= (-1)^n \alpha_1 I \\
-B_{n-1} &= (-1)^n I.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά αυτές τις εξισώσεις επί $I, A, \ldots, A^n$ αντίστοιχα και προσθέτοντάς τις έχουμε

$$0 = (-1)^n(\alpha_n + \alpha_{n-1}A + \cdots + A^n) = \chi_A(A).\square$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10.$$

Επίσης έχουμε

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 21 & 42 & 25 \end{pmatrix} \text{ και } A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 0 \\ -9 & -17 & 0 \\ -117 & -234 & -125 \end{pmatrix}.$$

Επαληθεύμε το θεώρημα Cayley-Hamilton:

$$\begin{pmatrix} -10 & -18 & 0 \\ 9 & 17 & 0 \\ 117 & 234 & 125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 36 & 0 \\ -18 & -42 & 0 \\ -126 & -252 & -150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -18 & 0 \\ 9 & 15 & 0 \\ 9 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$