ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

1. Θεωρούμε τον πίνακα A με πραγματικούς αριθμούς:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και η διάσταση του χώρου $V(\lambda)$ για κάθε ιδιοτιμή λ.

2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιόχωρους των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Να εξετάσετε αν είναι τριγωνοποιήσιμος ο πίνακας A του $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1}, αν γνωρίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

6. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας πίνακας $n \times n$ με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A.

7. Εξετάστε αν η παρακάτω γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z).$$

Να υπολογισθούν οι διαστάσεις των ιδιόχωρων.

8. Εξετάστε αν ο παρακάτω πίνακας του $M_3(\mathbb{C})$ είναι διαγωνοποιήσιμος:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Αφού αποδείξτε ότι ο πίνακας $A \in M_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος, να βρεθεί ένας πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

10. Να υπολογισθεί ο πίνακας A^n, $n \in \mathbb{N}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (ax+y, x+ay)$, είναι διαγωνοποιήσιμη.

12. Έστω $f : V \longrightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Η f λέγεται μηδενοδύναμη αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτιο ώστε $f^m = 0$. Αν f είναι μηδενοδύναμη εξετάστε αν η f διαγωνοποιείται.