

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΛΤ

1. i) Έπειδή $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0. \text{ Άρα, η ακολουθία}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Έπειδή, $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} >$

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ έχουμε ότι η } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ είναι και κάτω φραγμένη.}$$

Άρα, συχυσίνα.

Έπειδή $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$, έχουμε ότι

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι και άνω φραγμένη. Άρα, το όριο l της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

θα βρίσκεται μεταξύ του κάτω ορίου $1/2$ και άνω ορίου 1 .

ii) Δες τις σημειώσεις. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-x} = 0$.

iii) Από την (ii) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$. Έπειδή η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n$ έχει όριο το $+\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ θα έχουμε από ιδιότητες του ορίου συμπληρώσεων ότι και $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n} = 0$.

2. i) $A' = [0, 2]$ διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in [0, 2]$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο. Άρα, $[0, 2] \subseteq A'$. Από την άλλη μεριά κάθε $x \in [0, 2]^c$ έχει μια περιοχή που δεν τέμνει το A . Άρα, $x \notin A'$ και $A' = [0, 2]$.

ii) f είναι συνεχής στο σύνολο $B = \{e, \pi\} \cup (1, 2]$ διότι για κάθε $x \in B$ και κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ ενώ για όλα τα άλλα σημεία υπάρχουν ακολουθίες $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ με $a_n \rightarrow x, b_n \rightarrow x$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

iii) $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \in (1, 2) \cap \mathbb{Q} \\ \text{δεν υπάρχει για όλα τα άλλα σημεία.} \end{cases}$

3. Έστω $\gamma = f(0)$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{2} > 0$. Επειδή f είναι
 συνεχής στο 0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $\forall x \in (-\delta, \delta)$,
 $|f(x) - \gamma| < \frac{\gamma-1}{2}$ ή ισοδύναμα $\frac{\gamma-1}{2} < f(x) - \gamma < \frac{\gamma-1}{2} \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$.
 επομένως, $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $f(x) > \gamma + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma+1}{2} > 1$.

4. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 4/x + e^{\sin x}$ είναι
 συνεχής στον σύνδεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
 Επιπλέον, $f'(x) = 4 + \cos x e^{\sin x} > 0$. Άρα, f είναι γνησία
 αύξουσα. Επίσης, $f(0) = 4 \neq 0$ και $f(0) = 1$. Άρα, $f^{-1}(1) = 0$
 και συνεπώς $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$.