

2ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ στο μάθημα ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Έστω $(1\ 2\ 3) \in S_3$. Θεωρούμε την υποομάδα που παράγεται από την $(1\ 2\ 3)$: $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$. Υπολογίστε το αριστερό σύμπλοκο $(1\ 2)H$ και το δεξί σύμπλοκο $H(1\ 2)$. Δείξτε ότι η H είναι κανονική υποομάδα της S_3 .

2. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\pi = (1\ 3\ 4)(2\ 6)$ και $\rho = (1\ 4\ 3)(2\ 5)$ της S_6 . Να βρεθούν οι υποομάδες $\langle \pi \rangle$, $\langle \rho \rangle$ και $\langle \pi \rangle \cap \langle \rho \rangle$ της S_6 .

3. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\sigma = (1\ 3\ 5\ 2)(5\ 7\ 8\ 6)$ και $\tau = (3\ 5\ 9)(1\ 4)$ της S_9 . Να βρεθούν οι τάξεις των μεταθέσεων $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$. Εξετάστε αν οι παραπάνω μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές.

4. Έστω $\sigma \in S_n$ και $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ ένας κύκλος της S_n . Δείξτε ότι

$$\sigma(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_k)).$$

5. Θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{\sigma \in A_4 \mid \sigma^2 = \text{id}\}$ της S_4 .

(α) Δείξτε ότι $H = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

(β) Δείξτε ότι το H είναι κανονική υποομάδα της S_4 .

(γ) Δείξτε ότι η H είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein.

6. Έστω H υποομάδα της G και $N(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$. Το $N(H)$ καλείται η κανονικοποιούσα της H στη G . Δείξτε ότι $N(H) \leq G$ και $H \trianglelefteq N(H)$.

7. Αν H είναι υποομάδα της G και N κανονική υποομάδα της G , τότε $H \cap N \trianglelefteq H$.

8. Έστω $GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ η ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ με $\phi(A) = \det(A)$. Δείξτε ότι η ϕ είναι ένας επιμορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ είναι κανονική υποομάδα της $GL(2, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι $GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

9. Έστω H_1, H_2 υποομάδες μιας ομάδας G . Δείξτε ότι αν $|H_1| = 5$ και $|H_2| = 12$ τότε $H_1 \cap H_2 = e$.

10. Έστω G ομάδα. Μια απεικόνιση $f : G \rightarrow G$ που είναι ισομορφισμός ομάδων ονομάζεται αυτομορφισμός ομάδων.

(α) Δείξτε ότι το σύνολο των αυτομορφισμών της G

$$\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ αυτομορφισμός}\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

(β) Έστω $a \in G$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $f_a : G \longrightarrow G$ με $f_a(x) = axa^{-1}$. Δείξτε ότι η f_a είναι ένας αυτομορφισμός της G . Κάθε αυτομορφισμός της παραπάνω μορφής ονομάζεται εσωτερικός. Δείξτε ότι το σύνολο των εσωτερικών αυτομορφισμών της G

$$\text{Int}(G) = \{f_a | a \in G\}$$

είναι υποομάδα της $\text{Aut}(G)$.

(γ) Δείξτε ότι η ομάδα $\text{Int}(G)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $G/C(G)$, όπου $C(G) = \{y \in G | xy = yx \ \forall x \in G\}$.