1ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ στο μάθημα ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Δείξτε ότι, στο $\mathbb{R}$, η πράξη $x * y = x + y - xy$ είναι προσεταιριστική, μεταθετική και έχει ουδέτερο στοιχείο. Είναι το $(\mathbb{R}, *)$ ομάδα;

2. Έστω ότι $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ορίζουμε την πράξη $*$ στο σύνολο $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) * (x', y') = (xx', \frac{y'}{x} + x'y).$$

Δείξτε ότι το $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την πράξη $*$ είναι ομάδα.

3. Έστω G ομάδα. Δείξτε ότι, αν $\forall x \in G$, $x^2 = e$, τότε η G είναι αβελιανή (μεταθετική).

4. Να δείξετε ότι το σύνολο $V(\mathbb{Z}_n) = \{x \in \mathbb{Z}_n | x^2 = 1\}$ αποτελεί ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό του $\mathbb{Z}_n$.

5. Έστω G ομάδα και g ένα στοιχείο της G. Εάν H είναι μια υποομάδα της G, να δείξετε ότι το σύνολο

$$K = \{ghg^{-1} | h \in H\}$$

είναι υποομάδα της G.

6. Έστω G ομάδα και $a \in G$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$N_G(a) = \{x \in G | xa = ax\}$$

είναι υποομάδα της G. Ποια είναι η $N_G(e)$;

7. Δώστε όλα τα στοιχεία των υποομάδων $\langle \sigma \rangle$ και $\langle \tau \rangle$ της S_7, όπου $\sigma = (4\ \ 5)(3\ \ 5\ \ 7)$ και $\tau = (1\ \ 2)(4\ \ 6\ \ 7)$. Με ποιές ομάδες είναι ισόμορφες οι $\langle \sigma \rangle$ και $\langle \tau \rangle$;

8. Δείξτε ότι αν G είναι μια ομάδα τάξης p πρώτος, τότε οι μοναδικές υποομάδες της G είναι η G και η $\{e\}$.

9. Έστω G ομάδα. Θέτουμε

$$C(G) = \{z \in G | xz = zx, \forall x \in G\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $C(G)$ είναι κανονική υποομάδα της G.

10. Έστω $G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$H = \{A \in G | \det(A) = 1\}$$

είναι κανονική υποομάδα της G.