

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1. Θεωρούμε την ακόλουθη βάση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$:

$$\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο ορθοκανονικοποίησης κατά Gram-Schmidt για να μετατρέψετε τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ σε μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, u_3\}$.

2. (Θεωρία) Έστω V ένας Ερμητιανός διανυσματικός χώρος και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι αν A είναι ο πίνακας της f ως προς μια βάση του V , τότε ο πίνακας της f^* ως προς την ίδια βάση του V είναι A^t .

3. Έστω $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε:

$$f(x, y, z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1 - i)y + 3z).$$

Βρείτε τον τύπο της συζυγούς απεικόνισης f^* .

4. Έστω λ ιδιοτιμή μιας γραμμικής απεικόνισης f ενός Ερμητιανού διανυσματικού χώρου V . Δείξτε ότι αν $f^* \circ f = id_V$, τότε $|\lambda| = 1$.

5. Έστω W ένας υπόχωρος ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο V . Συμβολίζουμε με $W^\perp$ τον κάθετο χώρο στον W , δηλ. $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$. Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ του W που να είναι μέρος μιας ορθοκανονικής βάσης $\{u_1, u_2, \dots, u_r, \dots, u_n\}$ του V .

β) $V = W \oplus W^\perp$.

6. Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης. Αν W είναι ένας υπόχωρος του V , δείξτε ότι $(W^\perp)^\perp = W$.

7. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y, z - x).$$

Εξετάστε αν η f είναι αυτοσυζυγής.

8. Έστω $f : V \longrightarrow V$ μια αυτοσυζυγής γραμμική απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο. Υποθέτουμε ότι ο W είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V τέτοιος ώστε $f(W) \subseteq W$ (αναλλοίωτος από την f). Δείξτε ότι $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.

9. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί (πραγματικός) πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^t A P$ να είναι διαγώνιος.

10. Έστω $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε:

$$f(x, y, z) = (x + \sqrt{2}iy, -\sqrt{2}ix + y - \sqrt{2}iz, \sqrt{2}iy + z).$$

Βρείτε μια ΟΚΒ του $\mathbb{C}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f .