ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN

1. Έστω $f : V \longrightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Έστω $A = \ker(f^i)$ και $B = \ker(f^{i+1})$. Δείξτε ότι (i) $A \subseteq B$ και (ii) $f(B) \subseteq A$.

2. Έστω $f : V \longrightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Εάν W είναι ένας υπόχωρος του V ο οποίος είναι αναλλοίωτος από την f, δείξτε ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του V, ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής:

$$(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, αν υπάρχουν W_1, W_2 υπόχωροι του V, αναλλοίωτοι από την f, τέτοιοι ώστε $V = W_1 \oplus W_2$, δείξτε ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του V, ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής:

$$(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

3. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ με $A \neq I_n$. Υποθέτουμε ότι $A^3 = I_n$. Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Ισχύει το ίδιο αν $A \in M_n(\mathbb{R})$;

4. Έστω $f : V \longrightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\chi_f(t) = -(t-2)^4(t-3)^3$ και $Q_f(t) = (t-2)^2(t-3)$, βρείτε τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan της f.

5. Βρείτε όλες τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \longrightarrow V$ με $\chi_f(t) = -(t-2)^3(t-5)^2$.

6. Βρείτε όλες τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan ενός πίνακα $A \in M_5(\mathbb{C})$ του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $Q_A(t) = -(t-2)^2$.

7. Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

8. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow V$. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι ιδιοτιμές της f τέτοιες ώστε $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)$, (όπου $V(\lambda_i)$, $i = 1, 2 \ldots, k$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι). Αν κάθε ιδιόχωρος $V(\lambda_i)$, $i = 1, 2 \ldots, k$ είναι αναλλοίωτος από τη g, να δειχθεί $fg = gf$.

(Υποδ. Γράψτε ένα τυχαίο διάνυσμα $v \in V$ στη μορφή $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ με $v_i \in V(\lambda_i)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ και δείξτε ότι $g(f(v)) = f(g(v))$.)

9. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι σε κανονική μορφή Jordan.

10. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί πίνακας B, όμοιος του A, που να είναι σε κανονική μορφή Jordan.

11. Έστω $f : V \longrightarrow V$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^2 = \mathrm{id}_V$. Να δείξετε ότι υπάρχουν W_1, W_2 υπόχωροι του V τέτοιοι ώστε $V = W_1 \oplus W_2$, $f(x) = x$, $x \in W_1$ και $f(y) = -y$, $y \in W_2$. (Υποδ.: α) τρόπος: βρείτε τις πιθανές περιπτώσεις του ελάχιστου πολυωνύμου της f και εφαρμόστε την πρωταρχική ανάλυση, β) τρόπος: Θέσετε $W_1 = \{x \in V | f(x) = x\}$ και $W_2 = \{x \in V | f(x) = -x\}$ και αποδείξτε ότι $V = W_1 \oplus W_2$ γράφοντας ένα τυχαίο διάνυσμα του V στη μορφή $x = \frac{x - f(x)}{2} + \frac{x + f(x)}{2}$.)